

ath. P.
264

Math. P.
226^{ef}

Hoppe

Math. P. 226 f

LEHRBUCH
DER
ANALYTISCHEN GEOMETRIE.

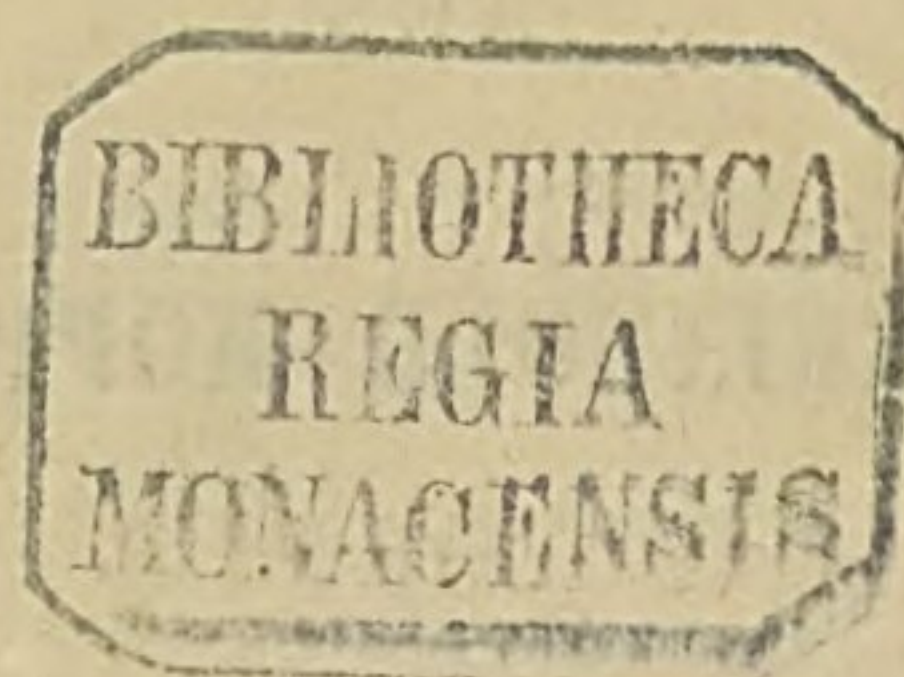
IN ZWEI TEILEN.

G. 1.

VON
REINHOLD HOPPE.

LEIPZIG, 1880.
C. A. KOCH'S VERLAGSBUCHHANDLUNG.
(J. SENGBUSCH.)

5 B



LEHRBUCH
DER
ANALYTISCHEN CURVENTHEORIE,

NEBST ZWEI VORAUSGEHENDEN ABSCHNITTEN

ENTHALTEND

DIE THEORIE DER LINEAREN RAUMGEBILDE

UND

DIE KINEMATIK.

ERSTER THEIL DES LEHRBUCHES DER ANALYTISCHEN
GEOMETRIE.

VON

R. HOPPE,

DR. PH., PROFESSOR DER MATHEMATIK U. PHILOSOPHIE AN DER KÖNIGL.
FRIEDRICH WILHELMS-UNIVERSITÄT ZU BERLIN,
ORD. MITGLIED DER KÖNIGL. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU UPSALA.

LEIPZIG, 1880.

C. A. KOCH'S VERLAGSBUCHHANDLUNG.

(J. SENGBUSCH.)



Vorwort.

Die Herausgabe der analytischen Geometrie ist mir nur dadurch möglich geworden, dass ich den grössten Teil davon vorher in einzelnen Journalartikeln veröffentlichte. Die Flächentheorie ist, als Abdruck aus dem Archiv der Math. u. Phys. LIX. 225—322, inzwischen gesondert erschienen. Die 3 ihr vorausgehenden Abschnitte, zum Teil publicirt in LV. 77—104, LVI. 41—84, LX. 376—400, erscheinen jetzt umgearbeitet und ergänzt als erster Teil des Lehrbuchs, als dessen zweiter Teil nun die Flächentheorie anzusehen ist.

Unter analytischer Geometrie ist zu verstehen die Theorie der Raumgebilde, welche von ihrer allgemeinsten Aufgabe ausgehend die Organe zu schaffen bestimmt ist, welche bei aller weiteren Untersuchung notwendig sind. Die Anwendung der Rechnung ist nicht ihr principiell unterscheidendes Merkmal, sondern das unersetzliche Mittel die Identität der Probleme, dadurch den erreichten Standpunkt in deren Lösung kenntlich zu machen und alle Resultate zur allgemeinsten Verwendung tauglich zu gestalten. Bei der Deduction bietet sie meistens den kürzesten Weg dar, doch sind directe geometrische Schlüsse, wo sie leichter zum Ziele führen, keinem Princip der analytischen Methode zuwider. Bei der Beobachtung hat die Rechnungsform vor der Figurbetrachtung den grossen Vorzug, dass in ihr das Wesentliche vom unvermeidlichen Zufälligen geschieden sichtbar wird. Der Functionsbegriff in der analytisch geometrischen Theorie ist der allgemeinste, welcher den Raumgebilden entspricht, also weder der schlechthin allgemeinste, noch der aus bestimmten Rechnungsformen entlehnte. Die Theorie der algebraischen Linien und Flächen wird misbräuchlich in manchen Büchern der umfassenden Theorie untergeschoben; sie ist ihrem Wesen nach nur constructive Theorie algebraischer Functionen und hat keinen Anspruch auf den Namen analytische Geometrie. Differential- und Integralrechnung sind keine blossen Mittel der Herleitung, sondern zum Ausdruck der Gesetze der Raumgebilde selbst notwendig. Daher ist die Kenntniss der Differentialrechnung für den, welcher analytische Geometrie treiben will, unentbehrlich. Dagegen brauchen ihm die Methoden der Integration nicht bekannt zu sein um deren Anwendung zu verstehen.

Die Gestaltung der Principien wird in hohem Grade vereinfacht durch die zwischen den 3 Dimensionen stattfindende Symmetrie und Vertauschbarkeit. Bei deren richtiger Verwendung reduciren sich alle auf 3 Dimensionen bezügliche Operationen fast ganz auf solche an 1 Dimension mit Wiederholung. Die symmetrische Gestaltung der algebraischen Rechnung erfordert die Determinantentheorie. Obgleich diese gewiss den meisten Lesern bekannt sein wird, lasse ich hiernächst



eine Bearbeitung ihrer Elemente folgen, weil letztere in den gewöhnlichen Lehrbüchern nicht in ihrer natürlichen Einfachheit vorgetragen werden.

Alle Gesichtspunkte vereinigen sich dahin, dass die analytische Geometrie mit dem Raume von 3 Dimensionen, nicht mit der Ebene zu beginnen hat. 1) Im Begriff der analytischen Methode ligt es, dass sie vom Allgemeinen ausgeht; der Weg vom Speciellen zum Allgemeinen ist der synthetische. Der Fall ist also hier ein anderer als bei der Schulgeometrie. 2) Der Anfang in 3 Dimensionen ist leichter als in zweien, weil, wie oben bemerkt, wegen der Vertauschbarkeit jedesmal nur 1 Dimension der Betrachtung unterligt, die Theorie der Ebene hingegen hiervon keinen wesentlichen Nutzen ziehen kann. Factisch behält letztere stets die Complication zweier Dimensionen, die Theorie des Raumes ist davon frei. 3) Die Kenntniss der Theorie der Ebene ist so gut wie gar keine Hülfe für die Theorie des Raumes, erschwert vielmehr deren Studium durch Verwöhnung. Der umgekehrte Uebergang ist in allen Punkten höchst einfach. 4) Da die stereometrischen Vorkenntnisse auf der Schule erworben werden, so schliesst sich der analytische Cursus stereometrisch stetiger an den Schulcursus an, als wenn man wider auf die Ebene zurückgeht.

Die analytische Geometrie baut auf die synthetische Schulgeometrie als ihre begriffliche Grundlage. Ihr erster Abschnitt, die Theorie der linearen Gebilde, ist nur die analytische Gestaltung derselben und nicht als Anfang im Speciellen anzusehen. Der 2. Abschnitt erweitert diese Grundlage, indem er zum Sein das Werden der Raumgebilde hinzufügt. Nach beiden Vorbereitungen hat der dritte die Linie, der vierte die Fläche zum Gegenstand. Die Flächentheorie, welche nur Bekanntes verarbeitete, ist bereits in Zeitschriften einer Kritik gewürdigt worden; ich spreche bei dieser Gelegenheit den Verfassern derselben meinen Dank aus. Die Curventheorie hingegen, welche man nach Monge's Bearbeitung 50 Jahre lang ohne Fortbildung gelassen hatte, habe ich principiell neu gestaltet und durch die in §. 54. definirte Scheidung der zwei bestimmenden Functionen auf einen Standpunkt gebracht, wo sie nahezu ein geschlossenes Ganze bildet. Sollte ihr gleichfalls eine Kritik zuteil werden, so empfehle ich vor allem der Beurteilung die Quelle aller Vereinfachung, die Einführung des Krümmungs- und Torsionswinkels statt der bisher gebräuchlichen Composita Krümmung und Torsion. Dass ich nicht Lob, sondern Nachfolge wünsche und ebenso jedem weiteren Fortschritt gern folgen werde, brauche ich nicht zu versichern. Jedes Urtheil aber über das Gegenwärtige ist müssig, wenn es die Hauptfrage unberührt lässt: Ist die genannte Einführung ein die Natur des Gegenstandes treffender, notwendiger Schritt in der Fortentwicklung der analytischen Curventheorie?

R. Hoppe.



Elemente der Determinantentheorie.

Die folgende Bearbeitung geht aus dem Gesichtspunkt hervor, dass die der Determinantentheorie eigentümlichen einfachen, allgemeinen und weitgreifenden Schlüsse ihren eigentlich instructiven Kern bilden, der nicht durch umständliche Methoden verdeckt werden darf. Alle Vorbereitung durch specielle Rechnung, alle unnötige Zerlegung verwerfe ich und zeige, dass zur Herleitung keines elementaren Satzes eine Anwendung der Unterdeterminanten erforderlich ist. Die Kenntniss der letztern ist deshalb nicht überflüssig.

§. 1. Gesetz der Determinantenbildung.

Die Determinante eines Systems von n Reihen zu je n Elementen, die sich demgemäss folgendermassen in ein Quadrat ordnen lassen

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{vmatrix} \quad (\text{D})$$

wird erhalten, indem man das Product der in der Diagonale von links oben nach rechts unten stehenden Elemente

$$\begin{matrix} 1 & 2 & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{matrix}$$

bildet, dann die untern Indices alle Permutationen durchlaufen lässt, und bei jeder Vertauschung von 2 Indices das Vorzeichen des Products wechselt, endlich alle so erhaltenen Producte addirt.

Sie wird bezeichnet durch das geordnete System von nn Elementen zwischen 2 Verticalstrichen, wie oben zu sehen ist. Je nach der Reihenzahl n heisst sie n ter Ordnung.

Statt der untern Indices kann man auch die obern permutiren; oder was dasselbe ist die Horizontalreihen lassen sich zu Verticalreihen machen und umgekehrt; die Determinante bleibt unverändert.

§. 2. Beobachtungen.

1) Jeder Term einer Determinante enthält aus jeder Reihe (horizontalen wie verticalen) ein und nur ein Element als Factor.

2) Bei Vertauschung zweier parallelen Reihen wechseln alle Terme, folglich auch die Determinante ihr Vorzeichen, ohne Veränderung ihres absoluten Wertes.

§. 3. Lehrsätze.

1) Sind 2 horizontale oder 2 verticale Reihen in allen entsprechenden Elementen einander gleich, und man vertauscht sie, so bleibt natürlich die Determinante unverändert. Nach Beob. 2) vertauscht sie aber ihr Vorzeichen. Folglich ist sie null, und man hat den Satz:

Eine Determinante mit 2 gleichen parallelen Reihen ist null.

2) Nach Beob. 1) müssen alle Terme verschwinden, sobald alle Elemente einer Reihe verschwinden, und man hat den Satz:

Eine Determinante ist null, wenn eine Reihe null ist.

§. 4. Multiplication einer Determinante mit einem Factor.

Multiplicirt man alle Elemente einer Reihe mit demselben Factor m , so multipliciren sich nach Beob. 1) alle Terme mit m und das Multiplicationsgesetz lautet:

Eine Determinante wird mit einer Zahl multiplicirt, indem man eine beliebige Reihe damit multiplicirt.

§. 5. Addition gewisser Determinanten.

Die bekannte Regel über die Multiplication einer Summe s mit einem Factor m lässt sich so ausdrücken: ms ist gleich der Summe

der Werte, welche durch Substitution aller Terme von s für s aus ms erhalten werden. Ist nun jedes Element einer Reihe einer Determinante die Summe von k Theilen, so hat nach Beob. 1) jeder Term eine solche Summe zum Factor; folglich wird jeder Term, also auch die ganze Determinante widererhalten, wenn man für jede der n Summen gleichzeitig ihren ersten, dann ihren zweiten, u. s. w. endlich ihren k ten Teil substituirt und die k Resultate addirt. Das Ergebniss können wir in zweierlei Form aussprechen:

Eine Determinante lässt sich in eine Summe von k Determinanten zerlegen, die man erhält, indem man jedes Element einer Reihe in k Theile zerlegt und dieselben nach einander für die Summe substituirt.

Mehrere Determinanten, welche nur in einer Reihe ungleich sind, werden addirt, indem man die entsprechenden Elemente der ungleichen Reihe addirt.

In Verbindung mit §. 4. folgt hieraus:

Sind $D_1, D_2, \dots D_k$ Determinanten, die nur eine Reihe ungleich haben, und $m_1, m_2, \dots m_k$ beliebige Grössen, so kann man die Summe

$$m_1 D_1 + m_2 D_2 + \dots m_k D_k$$

in eine Determinante verwandeln, indem man die ungleiche Reihe jedes D mit dem zugehörigen m multiplicirt und die Producte addirt.

Jetzt folgt in Verbindung mit Lehrsatz 1):

Eine Determinante bleibt unverändert, wenn man zu einer Reihe das m fache einer parallelen Reihe addirt; mithin auch, wenn man von einer Reihe Theile streicht, welche einer parallelen Reihe proportionirt sind.

§. 6. Multiplication zweier Determinanten.

Sei

$$c_k = \begin{matrix} h & 1 & 1 & 2 & 2 & \dots & n & n \\ a_k b_h + a_k b_h + \dots & a_k b_h \end{matrix}$$

dann lässt sich die Determinante

$$C = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \dots & n \\ c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{vmatrix}$$

nach §. 5. bei successiver Anwendung auf die Summen $c_1, c_2 \dots c_n$ in n^n Determinanten zerlegen, die man erhält, indem man für jene Summen nach einander ihre Teile substituirt. Eine beliebige der n^n Determinanten ist dann

$$N = \begin{vmatrix} \alpha & \alpha & \beta & \beta & \dots & \nu & \nu \\ a_1 & b_1 & a_1 & b_2 & \dots & a_1 & b_n \\ \alpha & \alpha & \beta & \beta & \dots & \nu & \nu \\ a_2 & b_1 & a_2 & b_2 & \dots & a_2 & b_n \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & \\ \alpha & \alpha & \beta & \beta & \dots & \nu & \nu \\ a_n & b_1 & a_n & b_2 & \dots & a_n & b_n \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \dots & \nu \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta & \dots & \nu \\ a_1 & a_1 & \dots & a_1 \\ \alpha & \beta & \dots & \nu \\ a_2 & a_2 & \dots & a_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha & \beta & \dots & \nu \\ a_n & a_n & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

wo $\alpha, \beta, \dots \nu$ beliebige der Zahlen 1, 2, ... n bezeichnen. Befinden sich unter ihnen irgend 2 gleiche Zahlen, so hat die Determinante zur Rechten 2 gleiche Verticalreihen, und N ist null. Folglich sind unter allen Systemen $(\alpha, \beta, \dots \nu)$ nur diejenigen in Rechnung zu bringen, welche durch Permutation aus dem System (1, 2, ... n) hervorgehen.

Bei jeder solchen Permutation wechselt nun nach Beob. 2) die Determinante zur Rechten ihr Vorzeichen p mal, wenn p Vertauschungen von 2 Zahlen dazu erforderlich sind, während der absolute Wert ungeändert bleibt. Setzt man also

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \dots & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

so wird

$$N = (-1)^p b_1^{\alpha} b_2^{\beta} \dots b_n^v A$$

Hiernach ist A Factor aller Teile von C . Die Coefficienten von A aber gehen aus

$$\begin{matrix} 1 & 2 & & n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{matrix}$$

durch Permutation der obern Indices hervor, während ihr Vorzeichen, ausgedrückt durch $(-1)^p$, bei jeder Vertauschung von 2 Indices wechselt. Daher ist ihre Summe nach §. 1.

$$B = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ 2 & 2 & \dots & 2 \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & \dots & n \\ b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{vmatrix}$$

und man hat:

$$AB = C.$$

Es hat sich ergeben, dass man das Product zweier beliebigen Determinanten von gleicher Ordnung durch eine Determinante derselben Ordnung darstellen kann.

§. 7. Auflösung eines Systems linearer Gleichungen.

Es sei gegeben das System von n linearen Gleichungen zwischen n Gesuchten $x_1, x_2, \dots, x_n$

$$\begin{array}{cccc} 1 & 1 & & 1 \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots & a_n x_n = u \\ 2 & 2 & & 2 \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots & a_n x_n = u \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & & n \\ a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots & a_n x_n = u \end{array}$$

Die Determinante des Coefficientensystems

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & & 1 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 2 & 2 & & 2 \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & n & & n \\ a_1 & a_2 & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

geht nach Substitution von u für a_k über in

$$D_k = \begin{vmatrix} 1 & & 1 & 1 & 1 & \\ a_1 & \dots & a_{k-1} & u & a_{k+1} & \dots & a_n \\ 2 & & 2 & 2 & 2 & & 2 \\ a_1 & \dots & a_{k-1} & u & a_{k+1} & \dots & a_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ n & & n & n & n & & n \\ a_1 & \dots & a_{k-1} & u & a_{k+1} & \dots & a_n \end{vmatrix}$$

Da die u Summen von je n Teilen sind, so kann man nach §. 5. diejenigen Teile streichen, deren Coefficienten den Verticalreihen in D_k gleich sind. Dann bleibt für u nur übrig $a_k x_k$. Der gemeinsame Factor x_k der k ten Reihe, als Factor der Determinante herausgestellt, hat dann zum Coefficienten die Determinante D , und es wird

$$Dx_k = D_k$$

Ist nun D nicht null, so ist die beliebige Gesuchte

$$x_k = D_k : D$$

Ist hingegen D null, so sind alle Gesuchten unbestimmbar; denn wenn alle D_k null sind, so ist mindestens eine Gleichung durch jedes x_k erfüllt, wenn aber irgend ein D_k nicht null ist, so zeigt die resultirende Gleichung einen Widerspruch an. Hieraus folgt, dass für $D = 0$ nicht alle n Gleichungen von einander unabhängig sind. Vorausgesetzt, dass D nicht null ist, lautet das Ergebniss im Anschluss an die obige Anordnung:

Die k te Gesuchte ist gleich einem Bruch, dessen Nenner die Determinante des Coefficientensystems ist, und dessen Zähler daraus durch Substitution der Reihe der rechten Seiten für die k te Verticalreihe hervorgeht.

Sind alle u null, so sind auch alle D_k null. Die resultirende Gleichung zeigt, dass dann entweder alle x null sind, oder D null ist.

§. 8. Elimination.

Es seien m lineare Gleichungen zwischen n Gesuchten gegeben, in der Form, dass die rechten Seiten 0 sind; man soll $m - 1$ Unbekannte eliminiren. Man bilde eine Determinante, deren erste $m - 1$ Verticalreihen die Coefficienten der Eliminanden, und deren letzte Verticalreihe die linken Seiten der Gleichungen bilden. Nach Lehrs. 2) ist sie $= 0$, und nach §. 5. kann man alle Terme der Gleichungen, welche die Eliminanden enthalten, streichen. Hieraus ergibt sich die praktische Regel, wobei die anfangs §. 7. aufgestellte Gleichungsform vorausgesetzt ist:

Man ordne die Terme der Gleichungen so, dass die Eliminanden vor den übrigen Unbekannten kommen, streiche die Eliminanden nebst den nachfolgenden Additionszeichen, setze statt $=$ das Zeichen $-$, ziehe links und rechts einen Verticalstrich, und setze die so erhaltene Determinante $= 0$.

§. 9. Unterdeterminanten.

Da nach Beob. 1) jeder Term der in §. 1. aufgestellten Determinante D einen und nur einen Factor aus der k ten Verticalreihe enthält, so hat die Determinante die Form:

$$D = a_k \overset{1}{d_k} + a_k \overset{2}{d_k} + \dots a_k \overset{h}{d_k} + \dots a_k \overset{n}{d_k}$$

und zwar ist d_k eine Summe von Producten von je $n - 1$ Elementen des Systems (D). Die obern Indices jener Elemente sind der Reihe nach

$$1, 2, \dots h - 1, h + 1, \dots n$$

die untern in jeder möglichen Reihenfolge

$$1, 2, \dots k - 1, k + 1, \dots n$$

und mögen der Reihe nach sein

$$\alpha, \beta \dots \mu$$

Das Vorzeichen aber ist $(-1)^{p+q}$, wo p und q die Anzahlen der Vertauschungen je zweier Zahlen bedeuten, welche nötig sind, um die Reihe $1, 2, \dots n$ bzhw. in die Reihe $h, 1, 2, \dots h - 1, h + 1, \dots n$ und in die Reihe $k, \alpha, \beta, \dots \mu$ überzuführen. Nach §. 1. wird

demnach $\overset{h}{d_k}$ nach dem Gesetz einer Determinante aus einem System von $n - 1$ Reihen zu $n - 1$ Elementen gebildet, welches sich von dem System (D) nur dadurch unterscheidet, dass die h te Horizontalreihe und die k te Verticalreihe fehlt, während der Anfangsterm

der neuen Determinante im voraus das Vorzeichen $(-1)^{h+k}$ statt $+$ hat.

Die Grösse d_k^h heisst die dem Element a_k^h entsprechende Unter-determinante, und zwar ist $(-1)^{h+k} d_k^h$ die Determinante des Systems (D) nach Unterdrückung der h ten Horizontal- und k ten Verticalreihe.

Wie hier die Determinante nach Elementen einer Verticalreihe entwickelt ist, kann man sie natürlich auch nach Elementen einer Horizontalreihe entwickeln.

B e m e r k u n g.

Jeden der vorstehenden Sätze, jede Anordnung, Beobachtung und Regel wende der Studirende nach Auffassung der allgemeinen Argumentation auf Determinanten 2. und 3. Ordnung an. Eines weitern bedarf es nicht, um eine genügende Vertrautheit mit der Determinantenrechnung, soweit sie in der analytischen Geometrie vorkommt, zu erlangen.

Für die Determinanten 3. Ordnung ist noch folgende Bemerkung wichtig. Jede cyklische Permutation der Indices oder Reihen, d. h. jedes Fortschreiten in der Folge 1, 2, 3, 1, 2, 3 lässt das Vorzeichen der Determinanten, sowie ihrer Terme unverändert; die aufsteigende Folge (123, 231, 312) entspricht dem $+$ Zeichen, die absteigende (321, 213, 132) dem $-$ Zeichen jedes Terms, und zwei $-$ Zeichen geben ein $+$.

Inhaltsverzeichnis.

	Seite.
Erster Abschnitt. Theorie der linearen Gebilde.	1
I. Bestimmung der Lage linearer Gebilde.	1
II. Elementaraufgaben.	9
III. Uebergang zu neuen Coordinatensystemen.	20
Zweiter Abschnitt. Kinematische Grundlage der Curven- und Flächentheorie.	28
I. Allgemeine Sätze über stetige Variation der Gebilde.	28
II. Bestimmungsgrößen der momentanen Bewegung.	33
III. Bewegung einer Ebene.	37
IV. Bewegung einer Geraden.	43
Dritter Abschnitt. Theorie der Curven.	47
I. Bestimmungsgrößen.	47
II. Elementaraufgaben.	65
III. Begleitende Curven.	76
Vierter Abschnitt. Theorie der Flächen.	1
I. Entwicklung der theoretisch wichtigen geometrischen Be- ziehungen auf allgemeiner Grundlage.	2
II. Besondere Linien und Liniensysteme auf Flächen.	28
III. Besondere Arten von Flächen.	49
Anhang. Uebersicht der Probleme der Flächentheorie	95

Druckfehler

in den Principien der analytischen Flächentheorie.

Seite 24 Zeile 13 v. o. statt $p_1 t_1$ setze $p_1 t_1 t$.

25 12 v. o. fehlt ... (77)

in (78) muss t^2 wegfallen.

32 5 v. o. statt eg setze $\sqrt{eg}$.

7 v. o. fehlt vor der Klammer der Factor t .

33 2 v. o. statt E, F setze $-E, -F$.

5 v. o. „ E „ $-E$.

8 v. o. „ $-\left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)^2$ „ $+\left(\frac{\partial e}{\partial v}\right)^2$.

„ $-\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2$ „ $+\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2$.

38 5 v. u. „ $-\frac{\sqrt{e}}{e_1}$ „ $\frac{\sqrt{e}}{e_1}$.

40 3 v. u. „ $\sqrt{g} \partial u$ „ $\sqrt{g} \partial v$.

43 8 v. u. „ S. 16. „ S. 17.

46 2 v. o. „ $\frac{\partial u}{\partial s}$ „ $\frac{\partial \mu}{\partial s}$.

65 7 v. o. erste Gleichung (56) muss lauten:

$$\frac{\partial x}{\partial v} = i \sin(v + iw) \varphi' \dots$$

82 in den Formeln (109) fehlt überall im Nenner der Factor 4.



Analytische Geometrie.

Erster Abschnitt.

Theorie der linearen Gebilde.

I. Capitel.

Bestimmung der Lage linearer Gebilde.

§. 1. Axen.

Ein Gebilde für sich allein betrachtet hat keine Lage im Raume; es gibt nur relative Lage der Gebilde unter sich.

Die relativen Lagen aller Gebilde gegen alle lassen sich zurückführen auf die relativen Lagen derselben Gebilde gegen eine kleine Zahl bestimmter Gebilde; diese letzteren heissen Grundgebilde.

Zu den linearen Gebilden werden gerechnet Punkte, gerade Linien, Ebenen und der Raum, die Geraden unbegrenzt oder durch 1 oder 2 Punkte begrenzt, die Ebenen unbegrenzt oder ganz oder teilweise durch Gerade begrenzt, der Raum unbegrenzt oder ganz oder teilweise durch Ebenen begrenzt.

Gerade Linien als Grundgebilde heissen Axen, Ebenen als Grundgebilde wollen wir einstweilen Grundebenen nennen.

Eine Gerade ist die geometrische Darstellung einer unbegrenzt variablen reellen Grösse. Um sie so zu verwenden, muss auf ihr ein Anfangspunkt A , und von diesem aus eine positive und negative Seite gewählt werden. Die Variable x wird dann dargestellt durch die Strecke AP von A bis zu dem um den absoluten Wert von x nach der positiven oder negativen Seite hin entfernten Punkt P , jenachdem x positiv oder negativ ist.

Diese Anordnung ist bei jeder Axe zu treffen, hat aber auch Anwendung auf andere Gerade und soll im allgemeinen vorausgesetzt werden.

Strecke auf einer Geraden heisst der mit positivem oder negativem Vorzeichen versehene Abstand des Endes vom Anfang, jenachdem das Ende auf der positiven oder negativen Seite vom Anfang liegt, und wird mit 2 Buchstaben derart bezeichnet, dass der erste den Anfang, der zweite das Ende benennt. Sind also A, B, C, D beliebig liegende Punkte auf einer Geraden, so ist stets

$$AB = -BA; \quad AB + BC + CD = AD \\ AB + BC + CA = 0$$

Die Gerade, auf der die Strecke liegt, wollen wir ihren Träger nennen.

§. 2. Projectionen.

Projection eines Punktes auf eine Gerade oder Ebene heisst der Fusspunkt des Lotes, das von ersterem auf letztere gefällt wird.

Projection eines Gebildes auf eine Gerade oder Ebene heisst dasjenige geradlinige, bzw. ebene Gebilde, dessen sämtliche Punkte Projectionen von Punkten des ursprünglichen Gebildes sind.

Ist B die Projection von A , und Q die von P , so ist die Projection der Strecke AP stets die Strecke BQ , gleichviel, ob man die positive Richtung des Trägers von B nach Q oder von Q nach B nimmt.

Im folgenden wird es sich ausschliesslich um Projectionen auf Axen oder Grundebenen handeln.

§. 3. Richtungscosinus.

Unter dem Winkel zwischen zwei Geraden versteht man, wenn es sich nur um seine Grösse handelt, die Grösse eines Winkels, dessen Schenkel die positiven Richtungen der zwei Geraden haben.

Der positive, 2 Rechte nicht übersteigende Winkel zwischen einer Geraden und einer Axe heisst der Richtungswinkel der erstern gegen die letztere.

Da von den Richtungswinkeln fast nur die Cosinus in Rechnung kommen, so sagen wir Richtungscosinus statt Cosinus des Richtungswinkels. Richtungswinkel und Richtungscosinus bestimmen einander eindeutig.

Die Projection einer Strecke auf eine Axe ist gleich dem Product aus der Strecke und dem Richtungscosinus ihres Trägers.

Zum Beweise lege man durch den Endpunkt P der Strecke AP eine Ebene normal zur Axe, welche dieselbe in Q treffe. Ferner ziehe man von B , der Projection des Anfangs A , eine Gerade in der Richtung von AP , welche jene Ebene in R treffe. Dann ist, wie eine leichte Betrachtung ergibt, BR Hypotenuse im rechtwinkligen Dreieck BQR und $= AP$, daher nach absolutem Werte

$$BQ = AP \cos QBR$$

Beachtet man aber, dass die Projection einer Strecke gleiches oder ungleiches Vorzeichen mit der Strecke hat, jenachdem der Richtungswinkel ihres Trägers spitz oder stumpf ist, dass ferner der spitze Winkel QBR Richtungswinkel des Trägers von AP oder dessen Nebenwinkel ist, jenachdem dieser Richtungswinkel spitz oder stumpf ist, so findet man, dass nach Substitution des Richtungswinkels für QBR die vorige Gleichung, welche dann den zu beweisenden Satz ausdrückt, auch hinsichtlich der Vorzeichen erfüllt wird.

§. 4. Abscissen.

Abscisse eines Punkts heisst in Bezug auf eine Axe, welche dann Abscissenaxe genannt wird, die Strecke vom Anfangspunkte bis zur Projection des Punktes.

Ist α die Abscisse des Anfangs einer Strecke AP , x die des Endes, so ist stets die Projection der Strecke

$$= x - \alpha$$

Ist die Strecke $AP = r$, und a der Richtungscosinus ihres Trägers, so ist nach §. 3. dieselbe Projection auch $= ar$, folglich

$$x - \alpha = ar \quad (1)$$

Eine gebrochene Linie bestehe aus den positiven Strecken $r, r_1, r_2, \dots r_n$ mit den Richtungscosinus $a, a_1, a_2, \dots a_n$, die Abscisse des Anfangs sei α , die der Eckpunkte der einzelnen Strecken $x, x_1, x_2, \dots x_n$; dann ist identisch

$$x_n = \alpha + (x - \alpha) + (x_1 - x) + (x_2 - x_1) + \dots (x_n - x_{n-1})$$

also, indem man Gl. (1) auf alle Strecken anwendet,

$$x_n = \alpha + ar + a_1 r_1 + a_2 r_2 + \dots a_n r_n \quad (2)$$

und wenn die gebrochene Linie in ihrem Anfang endet,

$$ar + a_1 r_1 + a_2 r_2 + \dots a_n r_n = 0 \quad (3)$$

§. 5. **Coordinationen. Bestimmung der Punkte.**

Coordinationen eines Punktes heissen eine gewisse Anzahl Grössen, welche die Lage des Punktes relativ zu irgend welchen Grundgebilden vollständig und eindeutig bestimmen, so dass einem Wertsystem jener Grössen nur ein Punkt, und einem Punkte nur ein Wertsystem entspricht.

Die Coordinatentheorie geht nicht vom allgemeinen Begriff der Coordinationen aus, sondern von derjenigen Bestimmungsweise, welche die grössten Vorzüge hat, und vertauscht dieselbe nur dann mit andern, wenn sich für gewisse Probleme gewisse Bestimmungsweisen besonders eignen. Durch ein Coordinatensystem ist die Aufgabe einen Punkt zu bestimmen in voller Allgemeinheit erledigt; der Uebergang zu einem andern Coordinatensystem, auch wenn es ein allgemeineres ist, trägt zur Allgemeinheit der Lösung nichts bei.

Die grössten Vorzüge besitzt das cartesische oder rechtwinklig geradlinige Coordinatensystem. Unter Coordinationen schlechthin werden gewöhnlich cartesische verstanden.

Die cartesianischen Coordinationen eines Punktes sind dessen Abscissen auf 3 Axen, welche sich in ihrem gemeinsamen Anfangspunkte unter rechten Winkeln schneiden.

Dass diese 3 Abscissen den anfänglich genannten 2 Bedingungen der Coordinationen genügen, ist leicht nachzuweisen. Ein bestimmter Punkt hat auf jeder Axe nur eine Abscisse, demnach sind durch den Punkt die Coordinationen bestimmt. Ist umgekehrt die Abscisse auf einer Axe gegeben, so ist deren Endpunkt die Projection aller Punkte, die auf einer, normal zur Axe durch den Endpunkt gehenden Ebene liegen. Demnach sind durch die 3 Coordinationen 3 Ebenen bestimmt, auf denen der gesuchte Punkt liegen muss. Diese 3 Ebenen schneiden sich unter rechten Winkeln in einem Punkte, folglich entsprechen 3 Coordinationenwerte immer einem und nur einem Punkte.

Bezeichnet man die Coordinationen eines variablen Punktes bezüglich auf 3 Axen durch x , y , z , so werden die entsprechenden Axen die Axe der x , der y , der z , oder kürzer die x Axe, etc. genannt.

Die 3 Ebenen, welche durch je 2 Coordinatenachsen gehen, heissen die Coordinatenebenen, einzeln der obigen Benennung entsprechend die Ebene der yz , der zx , der xy , oder die yz Ebene, etc. Diese Ebenen können als Grundgebilde die Coordinatenachsen ersetzen. Einer jeden wird eine positive und negative Seite zugeschrieben, entsprechend der positiven und negativen Richtung der Axe, welche normal zu der Ebene ist. Zieht man dann durch einen beliebigen Punkt der Ebene

eine Normale, und trägt auf ihr eine Strecke, jenachdem sie positiv oder negativ ist, nach der positiven oder negativen Seite hin ab, so kann man diese die Strecke von der Ebene bis zum Endpunkt nennen. Nach dieser Anordnung sind die Coordinaten die Strecken von den 3 Coordinatenebenen bis zu dem zu bestimmenden Punkte.

§. 6. Bestimmung der Geraden.

Nimmt man auf einer Geraden, deren Richtungscosinus gegen die Axen der $x, y, z = a, b, c$ seien, einen festen Ausgangspunkt mit den Coordinaten α, β, γ , und bezeichnet r die Strecke von da bis zu einem variablen Punkte (x, y, z) auf ihr, so ist nach §. 4. Gl. (1)

$$x = \alpha + ar; \quad y = \beta + br; \quad z = \gamma + cr \quad (4)$$

woraus nach Elimination von r , wofern keine der Grössen a, b, c null ist:

$$\frac{x - \alpha}{a} = \frac{y - \beta}{b} = \frac{z - \gamma}{c} \quad (5)$$

und zwar drückt jede der 3 gleichen Grössen die Strecke vom Ausgangspunkte bis zum Punkte (x, y, z) aus.

Die 2 Gl. (5) sind, wofern a, b, c die Richtungscosinus einer Geraden bezeichnen, die durch den Punkt (α, β, γ) geht, notwendige und ausreichende Bedingung dafür, dass der Punkt (x, y, z) auf der genannten Geraden ligt. Notwendig ist die Bedingung gemäss der Herleitung der Gleichungen. Dass sie ausreichend ist, ergibt sich gleichfalls sofort. Denn, trägt man auf der gedachten Geraden vom Ausgangspunkte aus die Strecke r ab, welche durch die Grössen (5) dargestellt wird, so sind, wie gezeigt, $\alpha + ar, \beta + br, \gamma + cr$ die Coordinaten des Endpunkts, zugleich aber $= x, y, z$. Folglich ist der Punkt (x, y, z) identisch mit dem Endpunkt, d. i. mit einem Punkte auf der Geraden.

Zugleich hat sich ergeben, dass eine Gerade, nebst ihrer positiven Richtung, durch die Coordinaten ihres Ausgangspunktes und durch ihre 3 Richtungscosinus vollständig bestimmt wird.

Die Gl. (5), welche die Eigenschaft eines Punktes (x, y, z) ausdrücken auf einer bestimmten Geraden zu liegen, heissen die Gleichungen dieser Geraden. Sofern sich deren Form verändern lässt, heisst die gegenwärtige die Grundform.

Sind irgendwelche der Grössen a, b, c null, so bleiben die Gl. (4) in Geltung, von denen die entsprechenden von selbst frei von r sind und den Sinn der Gl. (5) interpretiren. Um die Grundform auch für solche Fälle aufrecht zu erhalten, gebrauchen wir das Symbol

$$= \frac{z - \gamma}{0}$$

im Sinne $z = \gamma$. Dann gelten die Gl. (5) allgemein.

§. 7. Entfernung zweier Punkte.

Die Gerade, welche 2 Punkte verbindet, ist die Diagonale des rechtwinkligen Parallelepipeds, dessen 2 Gegenecken die 2 Punkte, und dessen Kanten den Coordinatenaxen parallel sind. Die Kanten sind hier einzeln gleich den absoluten Werten der Projectionen der Diagonale auf die Axen. Sind (α, β, γ) und (x, y, z) die 2 Punkte, r deren Verbindung, so sind nach §. 4. die Kanten einzeln

$$= \pm (x - \alpha), \quad \pm (y - \beta), \quad \pm (z - \gamma)$$

daher ist nach dem, auf den Raum ausgedehnten Pythagoräischen Lehrsatz

$$r^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2 \quad (6)$$

und das hierdurch bestimmte r drückt die Entfernung der Punkte (α, β, γ) und (x, y, z) aus.

§. 8. Winkel zwischen Geraden von gegebener Richtung.

Von 2 Geraden sind die Richtungscosinus a, b, c und a_1, b_1, c_1 bekannt, der zwischen ihnen enthaltene positive, 2 Rechte nicht übersteigende Winkel wird gesucht.

Vom Anfangspunkt der Coordinaten O mögen 2 Gerade von beliebigen Längen

$$OA = r, \quad OA_1 = r_1$$

in den bekannten Richtungen gehen; der von ihnen eingeschlossene Winkel ϑ ist der gesuchte. Wir ziehen $AA_1 = R$; x, y, z seien die Coordinaten von A , und x_1, y_1, z_1 die von A_1 . Dann ist nach einem bekannten Satze der Trigonometrie

$$\cos \vartheta = \frac{r^2 + r_1^2 - R^2}{2rr_1}$$

Nach §. 7. ist aber

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2$$

$$R^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2$$

Dis im Zähler eingeführt gibt:

$$\cos \vartheta = \frac{xx_1 + yy_1 + zz_1}{rr_1}$$

Nach §. 6. ist

$$\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = r; \quad \frac{x_1}{a_1} = \frac{y_1}{b_1} = \frac{z_1}{c_1} = r_1$$

Setzt man hieraus die Coordinatenwerte ein, so erhält man:

$$\cos \vartheta = aa_1 + bb_1 + cc_1 \quad (7)$$

Aus diesem Resultate ergeben sich noch einige wichtige Sätze. Sind die 2 gegebenen Richtungen gleich, so ist:

$$\vartheta = 0; \quad a = a_1; \quad b = b_1; \quad c = c_1$$

folglich

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad (8)$$

Die Richtungscosinus jeder Geraden haben eine Quadratsumme = 1.

Ist ferner der Winkel zwischen den 2 Geraden ein rechter, so wird Gl. (7):

$$aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0 \quad (9)$$

Dis ist demnach die Bedingung, unter der 2 Richtungen zu einander normal sind.

Aus Gl. (7) lässt sich noch eine Formel ableiten. Man hat:

$$\begin{aligned} 1 &= a^2 + b^2 + c^2 \\ 1 &= a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 \\ 2 \cos \vartheta &= 2aa_1 + 2bb_1 + 2cc_1 \end{aligned}$$

Subtrahirt man die dritte Gleichung von der Summe der beiden ersten, so kommt:

$$(2 \sin \frac{1}{2} \vartheta)^2 = (a_1 - a)^2 + (b_1 - b)^2 + (c_1 - c)^2 \quad (10)$$

Diese Bestimmung von ϑ kommt in Anwendung, wenn die 2 Richtungen unendlich wenig von einander differiren.

§. 9. Bestimmung der Ebenen.

Alle Lote auf einer Geraden in demselben Punkte errichtet liegen in einer Ebene, auf welcher die Gerade senkrecht steht. Wir können daher die Ebene definiren als den Ort eines Lotes auf eine feste Gerade in einem festen Punkte derselben.

Die Gerade, d. i. die Normale der Ebene, habe die Richtungscosinus a, b, c , ein Lot auf sie im Punkte (α, β, γ) die Richtungscosinus a_1, b_1, c_1 . Dann sind nach §. 6. die Gleichungen des Lotes

$$\frac{x-\alpha}{a_1} = \frac{y-\beta}{b_1} = \frac{z-\gamma}{c_1} = r$$

und nach §. 8. die Bedingung der normalen Richtung:

$$aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0$$

Eliminirt man a_1, b_1, c_1 , so erhält man:

$$a(x-\alpha) + b(y-\beta) + c(z-\gamma) = 0 \quad (11)$$

Diese Gleichung drückt, sofern sie von der Richtung des Lotes unabhängig ist, die gemeinsame Eigenschaft aller Lote, daher aller Punkte, der Ebene aus, welche durch den Punkt (α, β, γ) geht, und deren Normale die Richtungscosinus a, b, c hat. Letztere können auch die Richtungscosinus der Ebene genannt werden; denn sie sind die Cosinus der Winkel, welche die Ebene mit den 3 Coordinatenebenen bildet. Da jedoch die Unterscheidung dieser Winkel von ihren Nebenwinkeln auf keinen so einfachen Kriterien beruht, ist im allgemeinen deren Bestimmung durch die Normale vorzuziehen.

Setzt man

$$a\alpha + b\beta + c\gamma = h$$

so geht Gl. (11) über in

$$ax + by + cz = h \quad (12)$$

und heisst so dargestellt die Gleichung der Ebene in ihrer Grundform. Die Form (11) ist brauchbar, wenn ein Punkt in der Ebene bekannt ist.

Ist einer der Coefficienten a, b, c null, so ist die Ebene einer Coordinatenaxe parallel; sind zwei derselben null, so ist sie einer Coordinatenebene parallel. Ist $h = 0$, so geht sie durch den Anfangspunkt.

Stimmen die linken Seiten der Gleichungen zweier Ebenen überein, so sind diese einander parallel.

Die Bedingung normaler Stellung zweier Ebenen ist, wie die zweier Geraden, die Gl. (9).

Die geometrische Bedeutung der Grösse h wird sich im II. Cap. ergeben.

§. 10. Coordinaten in der Ebene.

Liegen alle Gebilde, die man betrachten will, in einer Ebene, so kann man, mit wesentlichem Gewinn an Einfachheit, diese zur Ebene der xy nehmen. Ihre Gleichung ist dann:

$$z = 0 \quad (13)$$

Die Vereinfachungen, welche in den erhaltenen Formeln eintreten, sind folgende. Zunächst sind z , γ und c null zu setzen. Zur Bestimmung eines Punktes genügen 2 Coordinaten x , y , ergänzt durch die dritte (13). Die Gleichung einer Geraden wird

$$\frac{x - \alpha}{a} = \frac{y - \beta}{b} \quad (\text{zu ergänzen durch Gl. (13)})$$

die Relation zwischen den Richtungscosinus einer Geraden

$$a^2 + b^2 = 1$$

die Bedingung normaler Richtung

$$aa_1 + bb_1 = 0 \quad (14)$$

Ferner ist es hier angemessen, statt der Richtungscosinus den Richtungswinkel gegen die x Axe δ einzuführen, diesen aber über die Grenzen 0 und $2R$ hinaus im Sinne einer Drehung von der positiven x Richtung nach der positiven y Richtung hin gelten zu lassen. Der Richtungswinkel gegen die y Axe wird dann $\delta - R$, also die beiden Richtungscosinus

$$a = \cos \delta, \quad b = \sin \delta$$

Die Bedingung normaler Richtung (14) wird überflüssig.

Die Aufgabe Ebenen zu bestimmen fällt hier zwar weg, doch findet die Gleichung der Ebene eine gute Anwendung auf Bestimmung der Geraden. Bei Voraussetzung $z = \gamma = c = 0$ stellt nämlich Gl. (12) oder Gl. (11), d. i.

$$ax + by = h \quad \text{oder} \quad a(x - \alpha) + b(y - \beta) = 0 \quad (15)$$

die Durchschnittslinie einer zur Figurebene senkrechten Ebene mit dieser dar, deren Normale die Richtungscosinus a , b gegen die x und y Axe hat. Da nun die Normale selbst in der Figurebene ligt, so bestimmt die eine oder die andre Gl. (15) eine Gerade durch die Richtungscosinus der Normale a , b und, wenigstens letztere, durch die Coordinaten des Ausgangspunktes α , β .

II. Capitel.

Elementaraufgaben.

Es sollen diejenigen Aufgaben gelöst werden, welche aus den einfachsten Combinationen der Data hervorgehen, so dass sie die am häufigsten gebrauchten Elemente für Aufgaben überhaupt innerhalb

der Grenzen des gegenwärtigen Abschnitts bilden. Sowol der Kürze als der Uebersichtlichkeit entspricht es am besten, diese Aufgaben systematisch erschöpfend nach den Datis zu ordnen, die Fragen aber an jede Combination nach dem Deductions-nexus anzuschliessen. In den ersten 3 Aufgaben handelt es sich um geometrische Deutung analytischer Data, in den folgenden um analytische Lösung aus geometrischen Datis hervorgehender geometrischer Fragen. In den letztern bezeichne stets p_k den Punkt $(\alpha_k \beta_k \gamma_k)$, e_k die Ebene

$$a_k x + b_k y + c_k z = h_k \quad (e_k)$$

und l_k die Gerade

$$\frac{x - \alpha_k}{a_k} = \frac{y - \beta_k}{b_k} = \frac{z - \gamma_k}{c_k} \quad (l_k)$$

wo a_k, b_k, c_k die Richtungscosinus sind.

§. 11. I. Gegeben 1 lineare Gleichung

$$Ax + By + Cz = D. \quad (E)$$

Diese ist identisch mit der Gleichung der Ebene (e) d. i. (12) für

$$A = Ma; \quad B = Mb; \quad C = Mc; \quad D = Mh$$

Aus Gl. (8) ergibt sich der Wert von M , nämlich

$$M = \pm \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

und nach Division die Werte von a, b, c, h .

§. 12. II. Gegeben 2 lineare Gleichungen

$$Ax + By + Cz = D \quad (E)$$

$$A_1 x + B_1 y + C_1 z = D_1 \quad (E_1)$$

Jeder Punkt (xyz) , der beiden zugleich genügt, liegt auf dem Durchschnitt der 2 Ebenen (E) (E_1), also auf einer Geraden. Diese habe die Gleichungen (1) d. i. (5), die sich schreiben lassen:

$$x = \alpha + ar; \quad y = \beta + br; \quad z = \gamma + cr \quad (\lambda)$$

Sofern die Werte von x, y, z den gegebenen Gleichungen unabhängig von r genügen müssen, hat man:

$$\left. \begin{aligned} Aa + Bb + Cc &= 0; & A\alpha + B\beta + C\gamma &= D \\ A_1 a + B_1 b + C_1 c &= 0; & A_1 \alpha + B_1 \beta + C_1 \gamma &= D_1 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

Die Gleichungen links geben:

$$Ma = \begin{vmatrix} BB_1 \\ CC_1 \end{vmatrix}; \quad Mb = \begin{vmatrix} CC_1 \\ AA_1 \end{vmatrix}; \quad Mc = \begin{vmatrix} AA_1 \\ BB_1 \end{vmatrix} \quad (17)$$

und nach (1) ist

$$M^2 = \begin{vmatrix} BB_1 \\ CC_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} CC_1 \\ AA_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} AA_1 \\ BB_1 \end{vmatrix}^2 \quad (18)$$

Die 3 Grössen α , β , γ , deren eine willkürlich ist, lassen sich in der Form

$$\alpha = Ag + A_1g_1; \quad \beta = Bg + B_1g_1; \quad \gamma = Cg + C_1g_1 \quad (19)$$

auf zwei zurückführen. Nach Einsetzung in die Gl. (5) und mit Gebrauch der Abkürzungen

$$\left. \begin{aligned} m &= A^2 + B^2 + C^2; & m_1 &= A_1^2 + B_1^2 + C_1^2 \\ n &= AA_1 + BB_1 + CC_1 \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

erhält man:

$$\begin{aligned} mg + ng_1 &= D \\ ng + m_1g_1 &= D_1 \end{aligned}$$

und da, wie eine leichte Rechnung zeigt,

$$\begin{vmatrix} mn \\ nm_1 \end{vmatrix} = M^2 \quad (21)$$

ist, so ergeben sich die Werte:

$$g = \frac{Dm_1 - D_1n}{M^2}; \quad g_1 = \frac{D_1m - Dn}{M^2} \quad (22)$$

Die Bestimmung der Geraden, enthalten in den Gl. (17) (21) (20) (19) (22), ist immer möglich, wenn nicht $M=0$ ist, wo, wie aus (18) zu ersehen, die Ebenen (E) (E₁) parallel werden.

§. 13. III. Gegeben 3 lineare Gleichungen

$$Ax + By + Cz = D \quad (E)$$

$$A_1x + B_1y + C_1z = D_1 \quad (E_1)$$

$$A_2x + B_2y + C_2z = D_2 \quad (E_2)$$

Ein Punkt, der allen zugleich genügt, hat die Coordinaten:

$$x = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} DD_1D_2 \\ BB_1B_2 \\ CC_1C_2 \end{vmatrix}; \quad y = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} AA_1A_2 \\ DD_1D_2 \\ CC_1C_2 \end{vmatrix}; \quad z = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} AA_1A_2 \\ BB_1B_2 \\ CC_1C_2 \end{vmatrix}$$

wo

$$\Delta = \begin{vmatrix} AA_1A_2 \\ BB_1B_2 \\ CC_1C_2 \end{vmatrix}$$

gesetzt ist. Ein solcher Punkt existirt, wenn nicht $\Delta = 0$ ist. In letzterm Falle hat man:

$$\Delta = \begin{vmatrix} BB_1 \\ CC_1 \end{vmatrix} A_2 + \begin{vmatrix} CC_1 \\ AA_1 \end{vmatrix} B_2 + \begin{vmatrix} AA_1 \\ BB_1 \end{vmatrix} C_2 = 0$$

das heisst nach (9): die Ebene (E_2) ist der Schnittlinie der Ebenen (E) und (E_1) parallel.

§. 14. IV. Gegeben 2 Punkte p, p_1 mit den Coordinaten α, β, γ und $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$.

Die Gleichungen ihrer Verbindungslinie, erstern zum Ausgangspunkt genommen, lauten:

$$\frac{x - \alpha}{a} = \frac{y - \beta}{b} = \frac{z - \gamma}{c} \quad (1)$$

Ihnen hat der Punkt ($\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$) zu genügen. Bezeichnet r die Strecke pp_1 , so ist

$$\frac{\alpha_1 - \alpha}{a} = \frac{\beta_1 - \beta}{b} = \frac{\gamma_1 - \gamma}{c} = r \quad (23)$$

woraus nach Division, als Gleichung von pp_1 in gegebenen Grössen:

$$\frac{x - \alpha}{\alpha_1 - \alpha} = \frac{y - \beta}{\beta_1 - \beta} = \frac{z - \gamma}{\gamma_1 - \gamma} \quad (24)$$

Ferner ist r bekannt nach (6), daher auch a, b, c nach (23) bis auf ein gemeinsames Doppelvorzeichen entsprechend den 2 möglichen Richtungen der Verbindungslinie.

§. 15. V. Gegeben ein Punkt p und eine Ebene

$$ax + by + cz = h \quad (e)$$

Hieraus sind direct bekannt die Gleichungen einer durch p gehenden Normale zu (e), nämlich:

$$\frac{x - \alpha}{a} = \frac{y - \beta}{b} = \frac{z - \gamma}{c}$$

Ist p_0 deren Fusspunkt, r die Strecke p_0p , so hat man:

$$\frac{\alpha_0 - \alpha}{a} = \frac{\beta_0 - \beta}{b} = \frac{\gamma_0 - \gamma}{c} = -r \quad (25)$$

und findet nach Einsetzung der Werte von $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ in Gl. (e):

$$r = a\alpha + b\beta + c\gamma - h \quad (26)$$

Hierdurch sind vermöge (25) auch die Coordinaten des Fusspunkts $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ bestimmt.

§. 16. VI. Gegeben 2 Ebenen

$$ax + by + cz = h \quad (e)$$

$$a_1x + b_1y + c_1z = h_1 \quad (e_1)$$

Der von ihnen gebildete Winkel ϑ ist bekannt durch (27); ihre Durchschnittslinie

$$\frac{x - \alpha}{a_2} = \frac{y - \beta}{b_2} = \frac{z - \gamma}{c_2} \quad (27)$$

wird bestimmt nach Aufgabe II., doch treten folgende Vereinfachungen ein. Man hat:

$$m = 1; \quad m_1 = 1; \quad n = \cos \vartheta$$

daher nach (21):

$$M = \sin \vartheta \quad (\text{mit Doppelvorzeichen zu denken})$$

$$g = \frac{h - h_1 \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta}; \quad g_1 = \frac{h_1 - h \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta} \quad (28)$$

$$a_2 = \frac{1}{\sin \vartheta} \left| \frac{bb_1}{cc_1} \right|; \quad b_2 = \frac{1}{\sin \vartheta} \left| \frac{cc_1}{aa_1} \right|; \quad c_2 = \frac{1}{\sin \vartheta} \left| \frac{aa_1}{bb_1} \right| \quad (29)$$

$$\alpha = ag + a_1g_1; \quad \beta = bg + b_1g_1; \quad \gamma = cg + c_1g_1 \quad (30)$$

Ist ϑ ein Rechter, so wird

$$g = h; \quad g_1 = h_1 \quad (31)$$

Ist $\vartheta = 0$ oder $= \pi$, so wird der Abstand beider Ebenen bzw. $= h_1 - h$ oder $h_1 + h$.

§. 17. VII. Gegeben ein Punkt p_1 und eine Gerade

$$\frac{x - \alpha}{a} = \frac{y - \beta}{b} = \frac{z - \gamma}{c} \quad (1)$$

Unmittelbar kennt man die Gleichung einer Ebene

$$a(x - \alpha_1) + b(y - \beta_1) + c(z - \gamma_1) = 0 \quad (32)$$

welche normal zu (1) durch p_1 geht. Der Schnittpunkt beider p_0 hat die Coordinaten

$$\alpha_0 = \alpha + al; \quad \beta_0 = \beta + bl; \quad \gamma_0 = \gamma + cl \quad (33)$$

wo l die Strecke pp_0 bezeichnet, und nach Einsetzung der Werte von $\alpha_0, \beta_0, \gamma_0$ für x, y, z in Gl. (32) die Bestimmung gewinnt:

$$l = a(\alpha_1 - \alpha) + b(\beta_1 - \beta) + c(\gamma_1 - \gamma) \quad (34)$$

Die Gleichungen der Geraden p_0p_1 sind dann nach Aufg. IV.

$$\frac{x - \alpha_1}{a_1} = \frac{y - \beta_1}{b_1} = \frac{z - \gamma_1}{c_1} \quad (1_1)$$

wo

$$a_1 = \frac{\alpha_1 - \alpha - al}{r}; \quad b_1 = \frac{\beta_1 - \beta - bl}{r}; \quad c_1 = \frac{\gamma_1 - \gamma - cl}{r} \quad (35)$$

$$r^2 = (\alpha_1 - \alpha - al)^2 + (\beta_1 - \beta - bl)^2 + (\gamma_1 - \gamma - cl)^2$$

ist. Hier stellt r den normalen Abstand des Punkts p von der Geraden (1) dar. Mit Anwendung von (34) nimmt sein Ausdruck die Gestalt an:

$$r = \sqrt{(\alpha_1 - \alpha)^2 + (\beta_1 - \beta)^2 + (\gamma_1 - \gamma)^2 - l^2} \quad (36)$$

Eine Ebene durch (1) und p_1 habe die Gleichung:

$$a_2(x - \alpha) + b_2(y - \beta) + c_2(z - \gamma) = 0$$

In ihr müssen auch die Punkte p_0, p_1 liegen, daher ist

$$a_2a + b_2b + c_2c = 0$$

$$a_2(\alpha_1 - \alpha) + b_2(\beta_1 - \beta) + c_2(\gamma_1 - \gamma) = 0$$

Nach Elimination von a_2, b_2, c_2 erhält man folgende, in gegebenen Grössen dargestellte Gleichung der Ebene:

$$\begin{vmatrix} a & \alpha_1 - \alpha & x - \alpha \\ b & \beta_1 - \beta & y - \beta \\ c & \gamma_1 - \gamma & z - \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad (37)$$

§. 18. VIII. Gegeben eine Gerade und eine Ebene

$$\frac{x - \alpha}{a} = \frac{y - \beta}{b} = \frac{z - \gamma}{c} \quad (1)$$

$$a_1x + b_1y + c_1z = h_1 \quad (e_1)$$

Unmittelbar kennt man den Winkel ϑ zwischen (1) und der Normale von (e₁) nach (7). Der Schnittpunkt p_1 von (1) und (e₁) hat die Coordinaten:

$$\alpha_1 = \alpha + al; \quad \beta_1 = \beta + bl, \quad \gamma_1 = \gamma + cl \quad (38)$$

und zwar erhält man nach Einführung in Gl. (e₁):

$$l = \frac{h_1 - (a_1\alpha + b_1\beta + c_1\gamma)}{\cos \vartheta} \quad (39)$$

Durch p_1 legen wir normal zu (1) eine Ebene

$$a(x - \alpha_1) + b(y - \beta_1) + c(z - \gamma_1) = 0$$

Sie schneidet die Ebene (e_1) in einer Geraden

$$\frac{x - \alpha_1}{a_0} = \frac{y - \beta_1}{b_0} = \frac{z - \gamma_1}{c_0} \quad (1')$$

wo nach (29)

$$a_0 = \frac{1}{\sin \vartheta} \begin{vmatrix} bb_1 \\ cc_1 \end{vmatrix}; \quad b_0 = \frac{1}{\sin \vartheta} \begin{vmatrix} cc_1 \\ aa_1 \end{vmatrix}; \quad c_0 = \frac{1}{\sin \vartheta} \begin{vmatrix} aa_1 \\ bb_1 \end{vmatrix} \quad (40)$$

und welche senkrecht auf (1) ist. Aus diesem Grunde liegt auch (1) in einer Ebene

$$a_0(x - \alpha_1) + b_0(y - \beta_1) + c_0(z - \gamma_1) = 0 \quad (41)$$

die normal zu (1') durch p_1 geht, und deren Gleichung, weil der Punkt $(\alpha\beta\gamma)$ hineinfällt, auch geschrieben werden kann:

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & x - \alpha \\ b & b_1 & y - \beta \\ c & c_1 & z - \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad (42)$$

Die Ebene schneidet wider die Ebene (e_1) in einer Geraden

$$\frac{x - \alpha_1}{a_2} = \frac{y - \beta_1}{b_2} = \frac{z - \gamma_1}{c_2} \quad (43)$$

welche die Projection von (1) auf (e_1) darstellt. Hier ist nach (29) mit nachfolgender Anwendung von (7)

$$\begin{aligned} a_2 &= b_1 c_0 - c_1 b_0 = \frac{1}{\sin \vartheta} \left(\begin{vmatrix} aa_1 \\ aa_1 \end{vmatrix} a_1 + \begin{vmatrix} aa_1 \\ bb_1 \end{vmatrix} b_1 + \begin{vmatrix} aa_1 \\ cc_1 \end{vmatrix} c_1 \right) \\ &= \frac{1}{\sin \vartheta} \begin{vmatrix} a & a_1 \\ \cos \vartheta & 1 \end{vmatrix} = \frac{a - a_1 \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \end{aligned} \quad (44)$$

und analog

$$b_2 = \frac{b - b_1 \cos \vartheta}{\sin \vartheta}; \quad c_2 = \frac{c - c_1 \cos \vartheta}{\sin \vartheta} \quad (44)$$

Die Gerade (1') existirt nicht, wenn (1) normal zu (e_1) , also $\sin \vartheta = 0$ ist. Schon Gl. (39) ist nicht erfüllbar, wenn (1) parallel (e_1) , also $\cos \vartheta = 0$ ist.

§. 19. IX. Gegeben 2 Gerade

$$\frac{x - \alpha}{a} = \frac{y - \beta}{b} = \frac{z - \gamma}{c} \quad (1)$$

$$\frac{x - \alpha_1}{a_1} = \frac{y - \beta_1}{b_1} = \frac{z - \gamma_1}{c_1} \quad (1_1)$$

Beide werden von einer dritten Geraden

$$\frac{x - \alpha_2}{a_2} = \frac{y - \beta_2}{b_2} = \frac{z - \gamma_2}{c_2} \quad (l_2)$$

in den Punkten p_0, p_0' rechtwinklig geschnitten. Dieses gemeinsame Lot (l_2) ist Schnittlinie der Ebenen

$$\begin{aligned} a(x - \alpha_2) + b(y - \beta_2) + c(z - \gamma_2) &= 0 \\ a_1(x - \alpha_2) + b_1(y - \beta_2) + c_1(z - \gamma_2) &= 0 \end{aligned}$$

deren Normalen (l) und (l_1) sind. Daher ist nach (29), wenn ϑ den Winkel zwischen den gegebenen Geraden bezeichnet,

$$a_2 = \frac{1}{\sin \vartheta} \begin{vmatrix} bb_1 \\ cc_1 \end{vmatrix}; \quad b_2 = \frac{1}{\sin \vartheta} \begin{vmatrix} cc_1 \\ aa_1 \end{vmatrix}; \quad c_2 = \frac{1}{\sin \vartheta} \begin{vmatrix} aa_1 \\ bb_1 \end{vmatrix} \quad (45)$$

Sind r, r_1 die Strecken auf $(l), (l_1)$ von deren respectiven Ausgangspunkten bis zu den Schnittpunkten pp_0, p_1p_0' , und l die Strecke p_0p_0' , d. i. der normale Abstand der gegebenen Geraden, so hat man nach den Gl. (1) (l_1) (l_2) :

$$\alpha_0 = \alpha + ar; \quad \beta_0 = \beta + br; \quad \gamma_0 = \gamma + cr \quad (46)$$

$$\left. \begin{aligned} \alpha_0' &= \alpha_1 + a_1r_1 = \alpha + ar + a_2l \\ \beta_0' &= \beta_1 + b_1r_1 = \beta + br + b_2l \\ \gamma_0' &= \gamma_1 + c_1r_1 = \gamma + cr + c_2l \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

Multipliziert man die 3 letzten Gleichungen mit a, b, c und addirt sie, so kommt:

$$a(\alpha_1 - \alpha) + b(\beta_1 - \beta) + c(\gamma_1 - \gamma) = r - r_1 \cos \vartheta = q \quad (48)$$

ebenso bei Multiplication mit a_1, b_1, c_1 :

$$a_1(\alpha_1 - \alpha) + b_1(\beta_1 - \beta) + c_1(\gamma_1 - \gamma) = r \cos \vartheta - r_1 = q_1 \quad (49)$$

und bei Multiplication mit a_2, b_2, c_2 und Einsetzung von deren Werten (45):

$$\frac{1}{\sin \vartheta} \begin{vmatrix} a & a_1 & \alpha_1 - \alpha \\ b & b_1 & \beta_1 - \beta \\ c & c_1 & \gamma_1 - \gamma \end{vmatrix} = l \quad (50)$$

Die Gl. (48) (49) geben:

$$r = \frac{q - q_1 \cos \vartheta}{\sin^2 \vartheta}; \quad r_1 = \frac{q \cos \vartheta - q_1}{\sin^2 \vartheta}; \quad r + r_1 = \frac{q - q_1}{2 \sin^2 \frac{\vartheta}{2}} \quad (51)$$

Hiermit sind gemäss (46) (47) die Coordinaten von p_0, p_0' bestimmt. Gl. (50) gibt den Normalabstand von (l) und (l_1) . Ist dieser

null, so ist es auch die Determinante zur Linken. Ist die Determinante null, so ist entweder l oder $\sin \vartheta$ null. In beiden Fällen liegen die gegebenen Geraden in einer Ebene. Folglich ist

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & \alpha_1 - \alpha \\ b & b_1 & \beta_1 - \beta \\ c & c_1 & \gamma_1 - \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad (52)$$

die Bedingung, unter der (1) und (1₁) in einer Ebene liegen.

Ferner sind 2 Ebenen bekannt, die einander parallel eine durch (1), eine durch (1₁) gehen. Da sie normal zu (1₂) sein müssen, so sind ihre Gleichungen:

$$\begin{vmatrix} a & a_1 & x - \alpha \\ b & b_1 & y - \beta \\ c & c_1 & z - \gamma \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} a & a_1 & x - \alpha_1 \\ b & b_1 & y - \beta_1 \\ c & c_1 & z - \gamma_1 \end{vmatrix} = 0 \quad (53)$$

Im Fall die Geraden sich schneiden, drückt jede von beiden die Ebene aus, in der sie liegen. Sind sie parallel, so findet man ihre Ebene, ihre Normale in der Ebene und ihren Abstand nach Aufg.VII., indem man von der einen Geraden nur ihren Ausgangspunkt in Anwendung bringt.

§. 20. X. Gegeben 3 Punkte p, p_1, p_2 .

Eine Ebene, durch alle 3 Punkte gehend, habe die Gleichung:

$$a(x - \alpha) + b(y - \beta) + c(z - \gamma) = 0 \quad (\varepsilon)$$

dann muss auch sein

$$a(\alpha_1 - \alpha) + b(\beta_1 - \beta) + c(\gamma_1 - \gamma) = 0$$

$$a(\alpha_2 - \alpha) + b(\beta_2 - \beta) + c(\gamma_2 - \gamma) = 0$$

und nach Elimination von a, b, c erhält man die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 - \alpha & \alpha_2 - \alpha & x - \alpha \\ \beta_1 - \beta & \beta_2 - \beta & y - \beta \\ \gamma_1 - \gamma & \gamma_2 - \gamma & z - \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad (54)$$

welche die Ebene direct in gegebenen Grössen ausdrückt.

Es soll nun der Inhalt $\mathcal{A}$ des Dreiecks pp_1p_2 gesucht werden. Sei $pp_1 = g$ als Grundlinie, $p_1p_2 = h$ als Höhe betrachtet. Dann sind nach (23) die Richtungscosinus von pp_1

$$a_1 = \frac{\alpha_1 - \alpha}{g}, \quad b_1 = \frac{\beta_1 - \beta}{g}, \quad c_1 = \frac{\gamma_1 - \gamma}{g}$$

die Richtungscosinus von $p_0 p_2$

$$a_0 = \frac{\alpha_2 - \alpha_0}{h}, \quad b_0 = \frac{\beta_2 - \beta_0}{h}, \quad c_0 = \frac{\gamma_2 - \gamma_0}{h}$$

Auf beiden senkrecht steht die Normale der Ebene (ε), deren Richtungscosinus a, b, c sind; daher ist nach (29)

$$gha = gh \begin{vmatrix} b_1 b_0 \\ c_1 c_0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \beta_1 - \beta & \beta_2 - \beta_0 \\ \gamma_1 - \gamma & \gamma_2 - \gamma_0 \end{vmatrix} \quad (55)$$

Sofern aber die Richtungen pp_0 und pp_1 identisch sind, ist nach (23)

$$\frac{\alpha_0 - \alpha}{\alpha_1 - \alpha} = \frac{\beta_0 - \beta}{\beta_1 - \beta} = \frac{\gamma_0 - \gamma}{\gamma_1 - \gamma}$$

woraus:

$$0 = \begin{vmatrix} \beta_1 - \beta & \beta_0 - \beta \\ \gamma_1 - \beta & \gamma_0 - \gamma \end{vmatrix}$$

Dis addirt zu (55) gibt, mit Beachtung dass $gh = 2A$:

$$2Aa = \begin{vmatrix} \beta_1 - \beta & \beta_2 - \beta \\ \gamma_1 - \gamma & \gamma_2 - \gamma \end{vmatrix} \quad (56)$$

und analog ist

$$\left. \begin{aligned} 2Ab &= \begin{vmatrix} \gamma_1 - \gamma & \gamma_2 - \gamma \\ \alpha_1 - \alpha & \alpha_2 - \alpha \end{vmatrix} \\ 2Ac &= \begin{vmatrix} \alpha_1 - \alpha & \alpha_2 - \alpha \\ \beta_1 - \beta & \beta_2 - \beta \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (56)$$

Nimmt man die Quadratwurzel aus der Summe der Quadrate, so erhält man den Wert von $2A$, und nach Division die Richtungscosinus der Ebene (ε). $A = 0$ ist Bedingung, dass p, p_1, p_2 in gerader Linie liegen.

§. 21. XI. Gegeben 4 Punkte p, p_1, p_2, p_3 .

Die Bezeichnungen von der Aufg. X. mögen weiter gelten. Der Abstand des Punktes p_3 von der Ebene des Dreiecks A ist nach (26)

$$l = a(\alpha_3 - \alpha) + b(\beta_3 - \beta) + c(\gamma_3 - \gamma)$$

Bezeichnet also T den Inhalt des Tetraeders $pp_1 p_2 p_3$, so hat man:

$$6T = 2Al = 2Aa(\alpha_3 - \alpha) + 2Ab(\beta_3 - \beta) + 2Ac(\gamma_3 - \gamma)$$

also nach (56):

$$6T = \begin{vmatrix} \alpha_1 - \alpha & \alpha_2 - \alpha & \alpha_3 - \alpha \\ \beta_1 - \beta & \beta_2 - \beta & \beta_3 - \beta \\ \gamma_1 - \gamma & \gamma_2 - \gamma & \gamma_3 - \gamma \end{vmatrix} \quad (57)$$

§. 22. Elementaraufgaben in der Ebene.

Wendet man §. 11. auf die Ebene $z = 0$ an, so ist es bloss nötig, die I. und III. Aufgabe zu specialisiren. Es zeigt sich, wenn man in jener C , in dieser C, C_1, A_2, B_2, D_2 null setzt, dass 1 lineare Gleichung

$$Ax \mp By = D$$

eine Gerade darstellt, von der die Richtungscosinus der Normale sind

$$\frac{A}{M}, \quad \frac{B}{M} \quad \text{für} \quad M = \pm \sqrt{A^2 \mp B^2}$$

woraus als Richtungscosinus der Geraden selbst

$$\frac{\pm B}{M} \quad \frac{\mp A}{M}$$

hervorgehen; und dass 2 lineare Gleichungen

$$\begin{aligned} Ax \mp By &= D \\ A_1x \mp B_1y &= D_1 \end{aligned}$$

einen Punkt

$$x = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} DD_1 \\ BB_1 \end{vmatrix}; \quad y = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} AA_1 \\ DD_1 \end{vmatrix} \quad \text{für} \quad \Delta = \begin{vmatrix} AA_1 \\ BB_1 \end{vmatrix}$$

bestimmen, wofern nicht $A:B = A_1:B_1$ ist, so dass die Gleichungen 2 Parallelen ausdrücken.

Im übrigen genügen die IV., V. und X. Aufgabe. Die erste bleibt nach Nullsetzung von z, γ, c unverändert. In der 2ten ist ein Punkt und eine Gerade in der Form

$$ax \mp by = h$$

gegeben; man findet die Gleichung, den Fusspunkt und die Länge des Lotes, einfacher als aus der VII. Aufg. In der VI. sind 2 Gerade in jener Form gegeben; alles dadurch bestimmte ist bereits bekannt; hier würden auch die V. und VI. Aufgabe anwendbar sein. In der X. Aufgabe ist $a = b = 0, c = \pm 1$ zu setzen; es ergibt sich, dass das Dreieck zwischen 3 Punkten $(\alpha\beta)(\alpha_1\beta_1)(\alpha_2\beta_2)$ ist

$$\Delta = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \alpha_1 - \alpha & \alpha_2 - \alpha \\ \beta_1 - \beta & \beta_2 - \beta \end{vmatrix}$$

III. Capitel.

Uebergang zu neuen Coordinatensystemen.

§. 23. Einführung neuer rechtwinkliger Coordinatenachsen.

Hat man ein Gebilde (oder ein System von Gebilden) relativ zu einem Coordinatenaxensystem bestimmt, so kann man die ganz gleiche Bestimmung auf jede andre Lage desselben Gebildes im Raume anwenden, indem man nur das Axensystem in die entsprechende Lage versetzt denkt. Da aber jede Lage im Raume nur relativ zu einer andern Lage bestimmt werden kann, so ist es, falls die neue Lage des Gebildes bestimmt sein soll, nötig das Axensystem in seiner neuen Lage relativ zum Axensystem in der alten Lage, oder, bequemer ausgedrückt, das neue Axensystem relativ zum alten zu bestimmen.

Aus der ursprünglichen Bestimmung des Gebildes, d. i. der Bestimmung des transponirten Gebildes relativ zum neuen Axensystem und aus der Bestimmung des letztern relativ zum alten Axensystem resultirt dann die Bestimmung des transponirten Gebildes relativ zum alten Axensystem. Es ist die Aufgabe, diese resultirende Bestimmung analytisch in Ausführung zu bringen.

Die Lage des neuen Axensystems wird am einfachsten bestimmt durch die Gleichungen der 3 Coordinatenebenen. Sofern diese Ebenen durch den Anfangspunkt α, β, γ gehen, sind deren Gleichungen nach §. 9.

$$\left. \begin{aligned} a(x - \alpha) + a_1(y - \beta) + a_2(z - \gamma) &= 0 \\ b(x - \alpha) + b_1(y - \beta) + b_2(z - \gamma) &= 0 \\ c(x - \alpha) + c_1(y - \beta) + c_2(z - \gamma) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (57)$$

Hier sind x, y, z Coordinaten eines Punktes P_0 auf je einer zum neuen System A_1 gehörigen Coordinatenebene in Bezug auf das alte System A .

Bedeuteten hingegen x, y, z die Coordinaten eines beliebigen Punktes P in Bezug auf A , so drücken nach §. 15. die linken Seiten der Gl. (57) die Strecken von jenen Ebenen bis zum Punkte P aus, und diese sind nach §. 5. die Coordinaten von P in Bezug auf A_1 . Bezeichnen wir letztere durch x_1, y_1, z_1 , so ist

$$\left. \begin{aligned} a(x - \alpha) + a_1(y - \beta) + a_2(z - \gamma) &= x_1 \\ b(x - \alpha) + b_1(y - \beta) + b_2(z - \gamma) &= y_1 \\ c(x - \alpha) + c_1(y - \beta) + c_2(z - \gamma) &= z_1 \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

Die je 3 Coefficienten jeder Gleichung sind nach §. 9. die Richtungscosinus der Normale jeder Coordinatenebene, d. i. der entsprechenden Coordinatenaxe des Systems A_1 , gegen die Axen des Systems A . In der folgenden Tabelle

		Axe der		
		x	y	z
Axe der	x_1	a	a_1	a_2
	y_1	b	b_1	b_2
	z_1	c	c_1	c_2

bedeutet demgemäss jeder der 9 Coefficienten den Cosinus des Winkels zwischen den beiden in gleicher Reihe stehenden Axen. Weil die Axen jedes Systems unter sich rechtwinklig sind, so ist nach §. 8.

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1; \quad aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0; \quad aa_2 + bb_2 + cc_2 = 0 \quad (59)$$

Multiplicirt man also die Gl. (58) einzeln mit a, b, c , so erhält man nach Addition die erste der 3 folgenden Gleichungen, die übrigen analog:

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha + ax_1 + by_1 + cz_1 \\ y &= \beta + a_1x_1 + b_1y_1 + c_1z_1 \\ z &= \gamma + a_2x_1 + b_2y_1 + c_2z_1 \end{aligned} \right\} \quad (60)$$

Durch Substitution diser Werte in analytische Ausdrücke können die ursprünglichen Coordinaten auf neue zurückgeführt, somit die relativ zu einem Axensystem gegebenen Gebilde relativ zu einem neuen bestimmt werden. Wir nennen dieselbe eine Orthogonal-substitution und die Coefficienten in ihrer Gesamtheit ein Orthogonalcoefficientensystem.

§. 24. Relationen zwischen den Orthogonalcoefficienten.

Löst man die Gl. (59), so geschriben

$$aa + bb + cc = 1$$

$$a_1a + b_1b + c_1c = 0$$

$$a_2a + b_2b + c_2c = 0$$

immer den zweiten Factor als Gesuchte betrachtend, nach a, b, c auf und setzt

$$\Delta = \begin{vmatrix} aa_1a_2 \\ b b_1b_2 \\ c c_1c_2 \end{vmatrix}$$

so kommt:

$$\Delta a = \begin{vmatrix} 1 & a_1 a_2 \\ 0 & b_1 b_2 \\ 0 & c_1 c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 b_2 \\ c_1 c_2 \end{vmatrix} \quad (61)$$

Da nun Δ bei allen cyklischen Vertauschungen der Buchstaben und Indices unverändert bleibt, so erhält man, bei Vertauschung von a mit allen übrigen Coefficienten:

$$\begin{aligned} \Delta &= \frac{1}{a} \begin{vmatrix} b_1 b_2 \\ c_1 c_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} b_2 b \\ c_2 c \end{vmatrix} = \frac{1}{a_2} \begin{vmatrix} b b_1 \\ c c_1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{b} \begin{vmatrix} c_1 c_2 \\ a_1 a_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{b_1} \begin{vmatrix} c_2 c \\ a_2 a \end{vmatrix} = \frac{1}{b_2} \begin{vmatrix} c c_1 \\ a a_1 \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{c} \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{c_1} \begin{vmatrix} a_2 a \\ b_2 b \end{vmatrix} = \frac{1}{c_2} \begin{vmatrix} a a_1 \\ b b_1 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (62)$$

Um den Wert von Δ zu finden, nehme man die Quadrate der Gl. (61) und der folgenden

$$-bc = b_1 c_1 + b_2 c_2$$

welche letztere ausdrückt, dass die y_1 und z_1 Axe einen rechten Winkel bilden; dann kommt:

$$\begin{aligned} \Delta^2 a^2 &= b_1^2 c_2^2 + b_2^2 c_1^2 - 2b_1 c_2 b_2 c_1 \\ b^2 c^2 &= b_1^2 c_1^2 + b_2^2 c_2^2 + 2b_1 c_1 b_2 c_2 \end{aligned}$$

dis addirt gibt:

$$\begin{aligned} \Delta^2 a^2 + b^2 c^2 &= (b_1^2 + b_2^2)(c_1^2 + c_2^2) \\ &= (1 - b^2)(1 - c^2) = 1 - b^2 - c^2 + b^2 c^2 = a^2 + b^2 c^2 \end{aligned}$$

folglich ist

$$\Delta^2 = 1 \quad \text{und} \quad \Delta = \pm 1$$

Demnach kann Δ zwei verschiedene Werte haben, aber nicht stetig aus dem einen in den andern übergehen. Jeder von beiden muss daher für alle diejenigen Lagen des Axensystems A_1 gegen A gelten, welche durch stetige Veränderung aus einer Lage hervorgehen. Betrachtet man nun zuerst diejenige Lage, wo die gleichnamigen Axen zusammenfallen, so ist hier

$$a = b_1 = c_2 = 1; \quad a_1 = a_2 = b_2 = b = c = c_1 = 0$$

also

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Folglich ist für alle Lagen des Systems A_1 , welche durch Bewegung aus dem System A hervorgehen,

$$\Delta = 1 \quad (63)$$

Vertauscht man ferner die positive und negative Richtung einer Axe, so wechselt eine Reihe in der Determinante Δ ihr Vorzeichen, also auch Δ , und wenn $\Delta = 1$ war, wird es $= -1$. Die Axensysteme A und A_1 haben dann eine symmetrische Lage gegen einander. Dasselbe findet statt, wenn man die Benennungen zweier Axen vertauscht: das System geht in das symmetrische über, und Δ wechselt sein Vorzeichen. Auch ist ersichtlich, dass jedes Axensystem mit jedem andern oder mit dem ihm symmetrischen durch Bewegung sich zur Deckung bringen lässt.

Da hiernach Δ nach freier Anordnung $= 1$ oder $= -1$ gemacht werden kann, das Vorkommen beider Werte eine nutzlose Verwicklung hervorbringen würde, der Wert -1 aber nicht durchgängig stattfinden kann — denn wenn zwei Systeme einem dritten symmetrisch sind, so sind sie einander congruent — so hält man die Regel fest, die Axen in fester Reihenfolge stets congruent zu benennen, so dass die positiven Richtungen der entsprechenden Axen durch Bewegung zur Deckung gelangen können. Dann ist ausschliesslich $\Delta = 1$.

Jetzt sind im ganzen 22 Relationen zwischen den Orthogonal-coefficienten bekannt: zunächst die Gl. (8), angewandt auf alle 6 Axen einzeln,

$$\left. \begin{array}{ll} a^2 + b^2 + c^2 = 1 & a^2 + a_1^2 + a_2^2 = 1 \\ a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1 & b^2 + b_1^2 + b_2^2 = 1 \\ a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1 & c^2 + c_1^2 + c_2^2 = 1 \end{array} \right\} \quad (64)$$

dann die Gl. (9), angewandt auf je 2 gegen einander rechtwinklige Axen,

$$\left. \begin{array}{ll} a_1 a_2 + b_1 b_2 + c_1 c_2 = 0 & bc + b_1 c_1 + b_2 c_2 = 0 \\ a_2 a + b_2 b + c_2 c = 0 & ca + c_1 a_1 + c_2 a_2 = 0 \\ aa_1 + bb_1 + cc_1 = 0 & ab + a_1 b_1 + a_2 b_2 = 0 \end{array} \right\} \quad (65)$$

ferner die Gl. (62), mit Anwendung von (63),

$$\left. \begin{array}{lll} a = \begin{vmatrix} b_1 b_2 \\ c_1 c_2 \end{vmatrix}; & a_1 = \begin{vmatrix} b_2 b \\ c_2 c \end{vmatrix}; & a_2 = \begin{vmatrix} b b_1 \\ c c_1 \end{vmatrix} \\ b = \begin{vmatrix} c_1 c_2 \\ a_1 a_2 \end{vmatrix}; & b_1 = \begin{vmatrix} c_2 c \\ a_2 a \end{vmatrix}; & b_2 = \begin{vmatrix} c c_1 \\ a a_1 \end{vmatrix} \\ c = \begin{vmatrix} a_1 a_2 \\ b_1 b_2 \end{vmatrix}; & c_1 = \begin{vmatrix} a_2 a \\ b_2 b \end{vmatrix}; & c_2 = \begin{vmatrix} a a_1 \\ b b_1 \end{vmatrix} \end{array} \right\} \quad (66)$$

endlich Gl. (63) selbst

$$\begin{vmatrix} aa_1a_2 \\ bb_1b_2 \\ cc_1c_2 \end{vmatrix} = 1$$

So oft in der Folge 2 Systeme von je 3 unter sich rechtwinkligen Geraden vorkommen, werden diese 22 Relationen in Geltung treten. Die Gl. (66) sind deshalb nicht weniger leicht als die übrigen im Gedächtniss zu behalten, weil man von der linken Seite an nur in der Reihe der Buchstaben und der Indices cyklisch aufzusteigen braucht, um die Elemente der rechten geordnet zu erhalten.

§. 25. Coordinatenwechsel durch einfache Rotation.

Haben die 2 Axensysteme eine Axe, z. B. die z Axe gemein, so wird

$$c_2 = 1; \quad a_2 = b_2 = c = c_1 = 0$$

und sämtliche Relationen reduciren sich auf die folgenden

$$a = b_1; \quad b = -a_1; \quad a^2 + b^2 = 1$$

welche sich erfüllen lassen durch die Werte:

$$a = b_1 = \cos \vartheta; \quad b = -a_1 = \sin \vartheta$$

Die Orthogonalsubstitution für diesen Fall wollen wir durch gleichzeitige Verrückung des Anfangspunkts nach dem Punkte $(\alpha\beta\gamma)$ erweitert aufstellen; dann lautet sie:

$$\left. \begin{aligned} x &= \alpha + x_1 \cos \vartheta + y_1 \sin \vartheta \\ y &= \beta - x_1 \sin \vartheta + y_1 \cos \vartheta \\ z &= \gamma + z_1 \end{aligned} \right\} \quad (67)$$

Das Axensystem A_1 geht hier aus dem A durch Rotation um die z Axe auf den Winkel ϑ und durch Parallelverschiebung hervor.

Für $z = \gamma = z_1 = 0$ enthalten die Gl. (67) die Orthogonalsubstitution in der Ebene.

§. 26. Reduction der Orthogonalcoefficienten auf 3 Winkel.

Die Gleichungen

$$a_2^2 + b_2^2 + c_2^2 = 1; \quad c^2 + c_1^2 + c_2^2 = 1$$

lassen sich erfüllen durch die Werte

$$\begin{aligned} a_2 &= \sin \omega \sin \psi; & b_2 &= \sin \omega \cos \psi; & c_2 &= \cos \omega \\ c &= -\sin \omega \sin \varphi; & c_1 &= -\sin \omega \cos \varphi \end{aligned}$$

Aus ihnen gehen die Werte der übrigen Orthogonalcoefficienten nach Gl. (66) hervor; denn die Gleichungen

$$a = b_1 c_2 - c_1 b_2; \quad b_1 = a c_2 - c a_2$$

bestimmen linear a und b_1 , die Gleichungen

$$a_1 = -b c_2 + c b_2; \quad b = -a_1 c_2 + c_1 a_2$$

ebenso a_1 und b . So erhält man:

$$\begin{aligned} a &= \cos \omega \sin \psi \sin \varphi + \cos \psi \cos \varphi \\ a_1 &= \cos \omega \sin \psi \cos \varphi - \cos \psi \sin \varphi \\ a_2 &= \sin \omega \sin \psi \\ b &= \cos \omega \cos \psi \sin \varphi - \sin \psi \cos \varphi \\ b_1 &= \cos \omega \cos \psi \cos \varphi + \sin \psi \sin \varphi \\ b_2 &= \sin \omega \cos \psi \\ c &= -\sin \omega \sin \varphi \\ c_1 &= -\sin \omega \cos \varphi \\ c_2 &= \cos \omega \end{aligned} \quad (68)$$

Um die geometrische Bedeutung der 3 Winkel φ , ψ , ω zu finden, errichten wir (α , β , γ null gesetzt) auf den Axen der z und z_1 , welche den Winkel ω einschliessen, das gemeinsame Lot Z . Berechnet man dessen Richtungscosinus gegen die Axen der x , y , z nach §. 18. Gl. (44), so findet man die Werte:

$$\pm \cos \varphi, \quad \mp \sin \varphi, \quad 0$$

Demnach ist φ der Winkel zwischen der x Axe und Z , wenn man die obern Zeichen nimmt, und zwar positiv von den x nach den y hin. Hieraus folgen die Richtungscosinus von Z gegen die Axen der x_1 , y_1 , z_1 :

$$\begin{aligned} a \cos \varphi - a_1 \sin \varphi &= \cos \psi \\ b \cos \varphi - b_1 \sin \varphi &= -\sin \psi \\ c \cos \varphi - c_1 \sin \varphi &= 0 \end{aligned}$$

Der Winkel ψ wird also in demselben Sinne von der x_1 Axe und Z gebildet.

Die Frage nach der positiven Richtung von Z , wodurch die Doppelzeichen bedingt sind, übergehen wir, weil keine Anwendung vorkommt.

Es hat sich gezeigt, dass unter den 9 Orthogonalcoefficienten nicht mehr als 3 unabhängig sind. Eine leichte Betrachtung ergibt, dass in der Tat ω , ψ , φ unabhängig variiren können, und zwar ω von

0 bis $2R$, ψ und φ unbegrenzt. Die Axen der z und z_1 lassen sich in eine beliebige Neigung ω bringen. Ohne diese Axen zu verrücken, kann man dann, weil Z in den Ebenen der xy und x_1y_1 ligt, durch unbegrenzte Drehung der Systeme der xy und x_1y_1 in ihren Ebenen die Winkel φ und ψ beliebig gross machen.

Die Reduction der 9 Grössen auf die 3 unabhängigen scheint bei manchen Untersuchungen anfangs unentbehrlich zu sein. Da sie jedoch in keiner symmetrischen Form vollzogen werden kann, so sind diejenigen Deductionsmethoden, welche sie vermeiden, vorzuziehen. Im folgenden wird sie nie in Anwendung kommen. Dagegen wird sich sogleich zeigen, dass die Variationen der 9 Grössen sich symmetrisch auf 3 unabhängige Variationen reduciren lassen.

§. 27. Variation der Orthogonalcoefficienten.

Setzt man

$$c\partial b + c_1\partial b_1 + c_2\partial b_2 = \partial P$$

$$a\partial c + a_1\partial c_1 + a_2\partial c_2 = \partial Q$$

$$b\partial a + b_1\partial a_1 + b_2\partial a_2 = \partial R$$

so erhält man nach Differentiation der Gleichungen

$$bc + b_1c_1 + b_2c_2 = 0; \quad ca + c_1a_1 + c_2a_2 = 0; \quad ab + a_1b_1 + a_2b_2 = 0$$

folgende neue Bestimmung derselben 3 Grössen:

$$b\partial c + b_1\partial c_1 + b_2\partial c_2 = -\partial P$$

$$c\partial a + c_1\partial a_1 + c_2\partial a_2 = -\partial Q$$

$$a\partial b + a_1\partial b_1 + a_2\partial b_2 = -\partial R$$

Zwei dieser 6 Gleichungen nebst der Derivation von $a^2 + a_1^2 + a_2^2 = 1$ bilden das System:

$$a\partial a + a_1\partial a_1 + a_2\partial a_2 = 0$$

$$b\partial a + b_1\partial a_1 + b_2\partial a_2 = \partial R$$

$$c\partial a + c_1\partial a_1 + c_2\partial a_2 = -\partial Q$$

welches die Variationen von 3 Orthogonalcoefficienten linear bestimmt. Multiplicirt man mit a , b , c und addirt, so kommt:

$$\partial a = b\partial R - c\partial Q$$

Die Variationen der übrigen 8 Orthogonalcoefficienten ergeben sich nach Analogie durch cyklische Vertauschung der Buchstaben und Indices, nämlich:

$$\left. \begin{aligned} \partial a &= \begin{vmatrix} b & \partial Q \\ c & \partial R \end{vmatrix}; & \partial a_1 &= \begin{vmatrix} b_1 & \partial Q \\ c_1 & \partial R \end{vmatrix}; & \partial a_2 &= \begin{vmatrix} b_2 & \partial Q \\ c_2 & \partial R \end{vmatrix} \\ \partial b &= \begin{vmatrix} c & \partial R \\ a & \partial P \end{vmatrix}; & \partial b_1 &= \begin{vmatrix} c_1 & \partial R \\ a_1 & \partial P \end{vmatrix}; & \partial b_2 &= \begin{vmatrix} c_2 & \partial R \\ a_2 & \partial P \end{vmatrix} \\ \partial c &= \begin{vmatrix} a & \partial P \\ b & \partial Q \end{vmatrix}; & \partial c_1 &= \begin{vmatrix} a_1 & \partial P \\ b_1 & \partial Q \end{vmatrix}; & \partial c_2 &= \begin{vmatrix} a_2 & \partial P \\ b_2 & \partial Q \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (69)$$

§. 28. Polarcoordinaten.

Radiusvector eines Punktes heisst dessen Abstand vom Anfangspunkte. Bezeichnet man den Radiusvector des Punktes (xyz) durch r , so ist

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2$$

Diese Gleichung wird erfüllt durch die Werte

$$x = r \cos \vartheta \cos \varphi; \quad y = r \cos \vartheta \sin \varphi; \quad z = r \sin \vartheta \quad (70)$$

und zwar erhält man alle möglichen Werte von x, y, z , wenn man ϑ von 0 bis π , φ von 0 bis 2π und r von 0 bis ∞ variiren lässt. Denn für alle positiven x, y, z findet man aus den Gleichungen

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}; \quad \operatorname{tg} \vartheta = \frac{z}{x \cos \varphi} = \frac{z}{y} \sin \varphi$$

Werte von φ und ϑ im ersten Quadranten. Die 4 ersten Quadranten von φ entsprechen dann allen Combinationen der Vorzeichen von x, y , und mit ϑ wechselt z sein Vorzeichen. Zuletzt findet man r aus einer der Gl. (70).

Die 3 Grössen r, ϑ, φ , einzeln gewöhnlich genannt Radiusvector, Höhe, Azimut, bestimmen die Lage des Punktes (x, y, z) relativ zum rechtwinkligen Axensystem, und heissen insofern dessen Polarcoordinaten.

Oeffters zieht man vor die Coordinate z beizubehalten. Schreibt man dann ϱ für $r \cos \vartheta$, so wird

$$x = \varrho \cos \varphi; \quad y = \varrho \sin \varphi \quad (71)$$

Die Grössen ϱ, φ, z heissen dann cylindrische Polarcoordinaten, zum Unterscheid die erstern sphärische, sofern bei constantem r die Coordinaten ϑ, φ einen Punkt auf einer Kugel, bei constantem ϱ die Coordinaten z, φ einen Punkt auf einem geraden Cylinder bestimmen. Die cylindrischen sind zugleich Polarcoordinaten in der Ebene.

Zweiter Abschnitt.

Kinematische Grundlage der Curven- und Flächentheorie.

I. Capitel.

Allgemeine Sätze über stetige Variation der Raumgebilde.

§. 29. Parameter und geometrischer Ort.

Bewegt sich ein Punkt (xyz) auf gegebene Weise, so sind nach Verlauf jeder Zeit t seine Coordinaten bestimmte Grössen, folglich sind sie überhaupt Functionen der Zeit t , und man hat:

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t).$$

Umgekehrt ist durch diese Gleichungen, wenn die 3 Functionen eindeutig gegeben sind, die Bewegung, wofern sie möglich ist, vollständig bestimmt.

Die Bedeutung der Gleichung bleibt dieselbe, wenn man statt t eine beständig mit t wachsende und im ganzen dieselben Werte durchlaufende Function u von t setzt. Dann wird

$$x = x(u); \quad y = y(u); \quad z = z(u) \tag{1}$$

$$u = u(t) \tag{2}$$

Bei der Bewegung beschreibt der Punkt eine Linie, d. i. ein Gebilde, welches von der Zeit unabhängig besteht. Bezeichnet also u eine Raumgrösse, so kann die Linie nur von den Gl. (1), nicht aber von Gl. (2) abhängig sein. Folglich erhält man den analytischen Ausdruck einer Linie, indem man die Coordinaten eines Punktes zu Functionen einer unabhängigen Variablen macht, vorausgesetzt dass diese Functionen den Bedingungen einer möglichen Bewegung entsprechen. Solche Functionen sind offenbar immer stetig. Wir wollen in der analytischen Geometrie Functionen nur dann stetig nennen, wenn sie als Ausdrücke von Coordinaten eines Punktes gesetzt, eine Bewegung desselben darstellen.

Die Linie (1) kann sich nur dadurch verändern, dass die Functionen x, y, z in andre übergehen; daher sind diese bei einer Veränderung in der Zeit t Functionen von t , und eine sich verändernde Linie wird dargestellt durch die Gleichungen

$$x = x(u, t); \quad y = y(u, t); \quad z = z(u, t)$$

wofür man, wie oben, auch schreiben kann:

$$x = x(u, v); \quad y = y(u, v); \quad z = z(u, v) \quad (3)$$

$$v = v(t) \quad (4)$$

Bei der stetigen Veränderung beschreibt die Linie eine Fläche, dargestellt durch die Gl. (3), während Gl. (4) als nicht mitbestimmend ausser Betracht bleibt.

Ebenso sind die Gleichungen

$$x = x(u, v, t); \quad y = y(u, v, t); \quad z = z(u, v, t)$$

der Ausdruck einer sich mit t stetig verändernden Fläche, und das von ihr beschriebene Raumgebilde, d. i. der ganze oder mehr oder weniger begrenzte Raum wird dargestellt durch die Gleichungen:

$$x = x(u, v, w); \quad y = y(u, v, w); \quad z = z(u, v, w)$$

Für die in Anwendung gekommenen Begriffe sind die Namen festzusetzen.

Eine unabhängige Variabele, mit welcher ein Raumgebilde sich stetig verändert, heisst dessen Parameter.

Hiernach sind die Grössen u, v, w die Parameter des variablen Punkts, der variablen Linie und Fläche.

Ein constantes Raumgebilde, in welchem alle Punkte liegen, welche ein variables Raumgebilde für irgend welche Werte ihrer Parameter enthält, heisst dessen (geometrischer) Ort.

Hiernach ist zunächst die Linie, die Fläche, der Raum der Ort bzw. des Punktes, der Linie, der Fläche, wenn sie mit 1 Parameter variiren. Derselben Definition gemäss ist aber auch die Fläche, der Raum der Ort bzw. des Punktes, der Linie, welche mit 2, und Raum der Ort des Punktes, der mit 3 Parametern variirt.

Einem einzelnen Werte des Parameters eines variirenden Raumgebilde entspricht ein einzelnes Raumgebilde; dieses heisst im Gegensatz zum variirenden das momentane Raumgebilde, und der Wert des Parameters dessen momentaner Wert.

Das Raumgebilde, dessen Ort ein anderer ist, heisst dessen erzeugendes.

§. 30. Gleichungen der Raumgebilde.

Nach dem Vorigen drücken die Coordinaten eines Punkts als Functionen eines, zweier oder dreier Parameter bestimmt ein Raumgebilde von 1, 2 oder 3 Dimensionen und zugleich den Weg irgend einer Erzeugung desselben aus. Eliminirt man zwischen den 3 Gleichungen die Parameter, so fällt der Ausdruck der Erzeugung weg, und man erhält die reinen Eigenschaften der resultirenden Gebilde. Nach Elimination von u und v zwischen den Gl. (3) behält man eine Gleichung zwischen x, y, z , also

$$f(x, y, z) = 0$$

als Eigenschaft eines Punktes, der auf bestimmter Fläche ligt. Eliminirt man statt dessen u zwischen den Gl. (1), so bleiben 2 Gleichungen zwischen x, y, z , also

$$f(x, y, z) = 0; \quad f_1(x, y, z) = 0$$

als Eigenschaft eines Punktes, der auf bestimmter Linie ligt. Diese Gleichungen definiren die Fläche und die Linie und heissen deshalb die Gleichungen der Fläche und der Linie. Analog definiren 3 Gleichungen zwischen x, y, z einen Punkt, sofern dessen Coordinatenwerte daraus resultiren.

§. 31. Consecutive Raumgebilde.

Nach dem Vorigen lässt sich eine Fläche, eine Linie, ein Punkt durch 1, 2, 3 Gleichungen von der Form

$$f(x, y, z) = 0$$

bestimmen, und nach bereits entwickelten Grundsätzen wird ein mit einem Parameter u variirendes Gebilde derart durch 1, 2, 3 Gleichungen von der Form

$$f(x, y, z, u) = 0$$

dargestellt. Wir nehmen an, dass die Functionen f aus der Erzeugung der Gebilde durch Bewegung resultiren, ferner vor der Hand, dass sie Differentiale haben, welche der Summe ihrer partiellen Differentiale gleich sind. Letztere Annahme fällt, wie sich später zeigen soll, mit ersterer zusammen, und wird dann überflüssig.

Sofern u unabhängig variirt, kann man von je 2 unendlich wenig differirenden Werten von u den einen als momentanen, wider mit u bezeichneten, den andern als um das unabhängig unendlich kleine Increment ∂u vermehrten Wert auffassen. Dann heissen u und $u + \partial u$

in Beziehung auf einander der momentane und der consecutive Parameterwert. Ihnen entsprechend heissen die durch die Gleichungen

$$f(x, y, z, u) = 0; \text{ etc.} \quad (5)$$

$$f(x, y, z, u + \partial u) = 0; \text{ etc.} \quad (6)$$

bestimmten Gebilde das momentane und das consecutive.

§. 32. Finale Raumgebilde.

Ein Gebilde heisst einem andern unendlich nahe, wenn jedem Punkte des erstern irgend ein Punkt des andern unendlich nahe ist.

Bei Punkten ist die Beziehung offenbar gegenseitig, nicht immer bei andern Gebilden. Dagegen sind stets momentanes und consecutives Gebilde einander unendlich nahe bei verschwindendem Parameterincrement ∂u .

Sei, um dis zu beweisen, (xyz) ein Punkt des momentanen Gebildes (5). Lässt man bei Fortbestehen der Gl. (5) u um ∂u wachsen, und gehen dann x, y, z über in $x + \partial x, y + \partial y, z + \partial z$, so wird

$$f(x + \partial x, y + \partial y, z + \partial z, u + \partial u) = 0; \text{ etc.}$$

daher ist nach Gl. (6) der Punkt $(x + \partial x, y + \partial y, z + \partial z)$ ein Punkt des consecutiven Gebildes, und dem Punkte (xyz) unendlich nahe, da sein Abstand

$$= \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}$$

ist. Demzufolge ist das momentane Gebilde dem consecutiven unendlich nahe. Da aber jeder Punkt des consecutiven aus einem Punkte des momentanen hervorgegangen sein muss, so lässt sich auch der obige Punkt $(x + \partial x, y + \partial y, z + \partial z)$ für irgend eine Abhängigkeit von u als Vertreter jedes Punkts des consecutiven Gebildes betrachten; folglich ist auch letzteres dem momentanen unendlich nahe.

Ein constantes Gebilde, welchem ein variables unendlich nahe ist, heisst dessen finales Gebilde, in der Ausdehnung, in welcher es auch dem variablen unendlich nahe ist.

Von einem solchen kann nur die Rede sein in Bezug auf eine unabhängig unendliche Grösse. Die Fälle der Anwendung sind verschieden. Der Fall, wo der Parameter eines variablen Gebildes selbst unendlich gross ist, bleibt für später. In Bezug auf das unendlich kleine Increment des Parameters gelangt man nur zu dem Satze, dass das momentane Gebilde das finale des consecutiven ist, ein Fall ohne Bedeutung. Im Folgenden wird Bezug genommen auf das Increment

eines andern Gebildes; hier ist das finale Gebilde abhängig vom Parameter des letztern, aber unabhängig von dessen Incremente. Es ist der Satz zu beweisen:

Ein variables Gebilde kann höchstens 1 finales haben.

Wären zwei constante Gebilde F_0, F_1 einem variablen F unendlich nahe, und letzteres den erstern, so wäre jeder Punkt von F_0 einem Punkte von F , und dieser einem Punkte von F_1 unendlich nahe. Da aber der Abstand zweier Punkte von einander nicht grösser ist als die Summe ihrer Abstände von einem dritten, so wäre jeder Punkt von F_0 einem Punkte von F_1 , mithin das constante F_0 dem constanten F_1 unendlich nahe, was unmöglich ist.

Es hat sich ergeben, dass ein finales Gebilde, wenn es existirt, durch die gegebene Variation bestimmt ist.

§. 33. Coincidenzlinien und Coincidenzpunkte.

Wird eine Fläche oder Linie

$$f(x, y, z, u) = 0; \text{ etc.}$$

von ihrer Consecutiven

$$f(x, y, z, u + \partial u) = 0; \text{ etc.}$$

bzw. in einer Linie oder in einem Punkte geschnitten, so ist der Schnitt, für welchen gleichzeitig die Gleichungen

$$f(x, y, z, u) = 0; \text{ etc.}$$

$$\frac{f(x, y, z, u + \partial u) - f(x, y, z, u)}{\partial u} = 0; \text{ etc.}$$

bei variabelm ∂u gelten, unendlich nahe bzw. einer Linie oder einem Punkte

$$f(x, y, z, u) = 0; \text{ etc.}$$

$$\frac{\partial f(x, y, z, u)}{\partial u} = 0; \text{ etc.}$$

welche unabhängig von ∂u sind.

Die finale Linie des Schnittes einer mit einem Parameter variirenden Fläche mit der consecutiven Fläche heisst die Coincidenzlinie der Fläche. Bezeichnen wir, solange keine verschiedenen Werte der Functionsargumente zu notiren sind, die Function $f(x, y, z, u)$ kurz durch f , so sind nach dem Vorigen

$$f = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial u} = 0 \quad (7)$$

die Gleichungen der Coincidenzlinie der Fläche $f = 0$.

Ebenso heisst der finale Punkt des Schnittes einer mit einem Parameter variirenden Linie mit der consecutiven Linie der Coincidenzpunkt der Linie. Nach dem Vorigen hat man zur Bestimmung des Coincidenzpunkts der Linie $f = 0$; $f_1 = 0$ die 4 Gleichungen:

$$f = 0; \quad f_1 = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial u} = 0; \quad \frac{\partial f_1}{\partial u} = 0 \quad (8)$$

deren 3 im allgemeinen dazu hinreichen, während die vierte eine Bedingung für die Existenz eines solchen Punktes stellt.

Die Coincidenzlinie ⁽⁷⁾~~(46)~~ variirt mit demselben Parameter u , kann daher einen Coincidenzpunkt haben, den wir dann den Coincidenzpunkt der Fläche $f = 0$ nennen. Für disen fallen die zweite und dritte der 4 Gl. (8) zusammen, und es bleiben zu seiner Bestimmung nur die drei:

$$f = 0; \quad \frac{\partial f}{\partial u} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} = 0 \quad (9)$$

Der geometrische Ort der Coincidenzlinie einer Fläche heisst deren Umhüllungsfläche, der geometrische Ort des Coincidenzpunkts einer Linie Umhüllungslinie, der geometrische Ort des Coincidenzpunkts einer Fläche Gratlinie ihrer Umhüllungsfläche.

II. Capitel.

Bestimmungsgrössen der momentanen Bewegung von Punkten, Ebenen und Geraden.

§. 34. Momentane Richtung und Geschwindigkeit der Bewegung von Punkten.

Jede Variation unbegrenzter Ebenen und Geraden ist eine Bewegung. Alles Gleiten derselben längs ihrer selbst lassen wir als bedeutungslos ausser Betracht.

Um den momentanen Bewegungszustand eines Raumgebildes darzustellen, lässt man dasselbe erst in einfachster Weise in sein Consecutives übergehen, setzt dann die zur Bestimmung diser Bewegung notwendigen Raumgebilde und Grössen fest, und stellt deren finale Raumgebilde und Grenzwerte auf, welche demnach als unabhängig

vom unendlich kleinen Parameterincrement den momentanen Zustand in Bezug auf die Bewegung charakterisiren.

Ein Punkt p , dessen Coordinaten

$$x = \alpha(u), \quad y = \beta(u), \quad z = \gamma(u)$$

gehe geradlinig mit constanter Geschwindigkeit in seine consecutive Lage p_1 mit den Coordinaten

$$x_1 = \alpha(u + \partial u), \quad y_1 = \beta(u + \partial u), \quad z_1 = \gamma(u + \partial u)$$

über. Diese Bewegung ist bestimmt durch die Richtungscosinus der Verbindungslinie

$$\frac{x_1 - x}{r}, \quad \frac{y_1 - y}{r}, \quad \frac{z_1 - z}{r} \quad (10)$$

und die Länge des Wegs

$$r = \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2 + (z_1 - z)^2}$$

woraus, wenn wir alle Geschwindigkeiten nach derjenigen messen, mit welcher der Parameter wächst, die Geschwindigkeit des Punktes $= \frac{r}{du}$ folgt.

Lässt man p_1 auf dem wirklichen Wege bis p zurückgehen, so variirt die Gerade pp_1 und die Geschwindigkeit $\frac{r}{du}$. Bei Zusammenfallen von p_1 mit p hat erstere eine Richtung, die nicht mehr durch 2 Punkte, aber als Endergebniss bestimmter Bewegung bestimmt ist. Ebenso hat alsdann die Geschwindigkeit einen bestimmten Wert. Beide sind unabhängig von du . Die Richtung pp_1 ist der Endrichtung unendlich nahe, folglich die entsprechenden Richtungscosinus die Grenzwerte der Richtungscosinus (10), nämlich

$$\frac{\partial x}{\partial u} \lim \frac{\partial u}{r}, \quad \frac{\partial y}{\partial u} \lim \frac{\partial u}{r}, \quad \frac{\partial z}{\partial u} \lim \frac{\partial u}{r}$$

und der Grenzwert von $\frac{\partial u}{r}$ muss existiren, wenn nicht seine 3 Coefficienten zugleich null sind.

Definirt man die Länge einer Curve s als den Grenzwert der Länge der aus unendlich kleinen Sehnen bestehenden Verbindungslinie ihrer Enden, so ist, wenn s den Weg des Punkts p bedeutet,

$$\lim \frac{\partial s}{r} = 1 \quad (11)$$

Demnach sind

$$\frac{\partial x}{\partial s}, \quad \frac{\partial y}{\partial s}, \quad \frac{\partial z}{\partial s} \quad (12)$$

die Richtungscosinus der finalen Geraden, der Tangente der Bahn, ferner

$$\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2} \quad (13)$$

das unendlich kleine Increment des Weges, und $\frac{\partial s}{\partial u}$ der Grenzwert der Geschwindigkeit.

Die analytische Praxis entlehnt nun den mit unendlich kleinem Parameterincrement variirenden Raumgebilden und Grössen die Benennungen für deren finale Raumgebilde und Grenzwerte, die den momentanen Zustand charakterisiren.

Hiernach ist die Tangentialrichtung als finale Richtung der geraden Verbindung consecutiver Punkte die momentane Richtung der Bewegung, $\frac{\partial s}{\partial u}$ als Grenzwert der Geschwindigkeit der geradlinigen gleichförmigen Bewegung von p nach p_1 die momentane Geschwindigkeit, und die Grössen ⁽¹²⁾ (51) nebst $\frac{\partial s}{\partial u}$ bestimmen den momentanen Bewegungszustand des Punkts (xyz) .

§. 35. Momentane Rotation und Ausweichung von Ebenen.

Eine unbegrenzte Ebene kann in jede ihr nicht parallele Ebene übergehen, indem sie um die Schnittlinie rotirt. Daher bilden die Axe der Rotation und der Rotationswinkel die einzigen notwendigen Bestimmungen der Bewegung aus einer Lage in die andre. Wendet man dies auf die momentane und consecutive Lage einer bewegten Ebene an, die sich nicht parallel bleibt, so hat man nur ihre Schnittlinie und den Winkel zwischen ihnen anzugeben. Die finale Gerade ihrer Schnittlinie ist die Coincidenzlinie, und heisst dem Obigen gemäss ihre momentane Rotationsaxe.

Zur Reduction des Rotationswinkels, welcher kein Increment einer in der Figur vorgefundenen Grösse ist, wenden wir folgende Construction an. Wir ziehen von einem festen Punkt aus eine Gerade von der Länge = 1 in der Richtung der Normale der Ebene. Bei Variation der Ebene erzeugt dann der Endpunkt der Geraden eine Curve ν , deren momentaner Bogen ν das Increment $d\nu$ gewinnt, während u um du wächst. Macht man den Uebergang in die consecutive Lage durch Rotation, so werden die Endpunkte des Bogens $d\nu$ durch einen Kreisbogen verbunden, der also mit $d\nu$ dieselbe Sehne, daher

nach (11) dividirt durch die Sehne denselben Grenzwert hat, und der andererseits dem Rotationswinkel gleich ist. Folglich ist die momentane Rotationsgeschwindigkeit gleich der, mit welcher ν wächst. Es möge ν der Drehungswinkel heissen. Die momentane Rotationsaxe oder Coincidenzlinie und die momentane Rotationsgeschwindigkeit sind dann die notwendigen Bestimmungen des Bewegungszustands einer Ebene, die sich nicht parallel bleibt.

Rückt die Ebene parallel mit sich selbst fort, so kann man annehmen, dass alle Punkte mit gemeinsamer Geschwindigkeit längs der Normale gleiten, und diese Geschwindigkeit, die wir die Ausweichungsgeschwindigkeit nennen, ist ausreichende Bestimmung des Bewegungszustandes.

§. 36. Momentane Rotation und Ausweichung von Geraden.

Die Bewegung einer Geraden lässt sich in 2 Bewegungen zerlegen. Damit die Gerade in ihre consecutive Lage gelangt, kann man sie um das gemeinsame Lot rotiren lassen, bis sie die Richtung der Consecutiven hat; von da muss sie längs ihrer Rotationsaxe gleiten bis zum Zusammenfallen. Die Rotation bestimmt sich wie bei der Ebene, nur tritt die Gerade selbst an die Stelle der Normale. Zur Bestimmung des Bewegungszustands einer Geraden gehört also die momentane Rotationsaxe, die momentane Rotations- und Ausweichungsgeschwindigkeit. Der Schnittpunkt der Geraden und der Rotationsaxe möge der Drehpunkt heissen. (Der Name Pol ist zu vildeutig). Ist die Ausweichung null, so ist der Drehpunkt zugleich Coincidenzpunkt.

§. 37. Abwickelbare und Regelflächen.

Die von einer bewegten Geraden erzeugte Fläche heisst eine Regelfläche. Die Regelflächen, welche ohne Ausweichung oder ohne Rotation erzeugt werden, haben bemerkenswerte unterscheidende Eigenschaften. Die Gerade ligt alsdann mit ihrer Consecutiven in einer Ebene. Daraus folgt, dass sich die erzeugte Fläche auf einer Ebene abwickeln lässt; denn vorausgesetzt dass der bis zur momentanen Lage der Erzeugenden erzeugte Teil der Fläche auf einer Ebene abgewickelt sei, so lässt sich durch Rotation des übrigen Teils um die Erzeugende auch das ebene Stück zwischen der Erzeugenden und Consecutiven in dieselbe Ebene legen. Da also aus dem Beginn der Abwicklung stets die Fortsetzbarkeit folgt, so ergibt sich nach bernoullischer Schlussweise auch die unbegrenzte Durchführbarkeit.

Alle bei gleichzeitiger Rotation und Ausweichung erzeugten Regelflächen heissen windschief. Demnach sind die Regelflächen entweder abwickelbar oder windschief.

Eine ohne Ausweichung bewegte Gerade hat einen Coincidenzpunkt, der entweder fest ist oder eine Umhüllungslinie der Geraden erzeugt. Es gibt daher 3 Arten abwickelbarer Flächen. Bleibt sich die Erzeugende parallel, so heisst die erzeugte Fläche cylindrisch, hat sie einen festen Coincidenzpunkt, konisch, hat sie eine Umhüllungslinie, in welchem Falle sie deren Tangente ist, Tangentenfläche.

Da der Coincidenzpunkt die unbegrenzte Gerade in 2 Arme teilt, so muss auch die Tangentenfläche von der Umhüllungslinie in zwei Teile getrennt werden, deren jeder von einem Arme erzeugt wird. Diese 2 Teile der Tangentenfläche fallen bei Abwicklung auf einander und bedecken einen Teil der Ebene (auf der convexen Seite der Umhüllungslinie) doppelt, während der andre Teil frei bleibt. In dieser Eigenschaft heisst die Umhüllungslinie der Erzeugenden die Gratlinie der Tangentenfläche.

III. Capitel.

Bewegung einer Ebene.

§. 39. Coincidenzlinie.

Die Gleichung einer bewegten Ebene sei

$$ax + by + cz = h \quad (e)$$

Den Fall einer Parallelbewegung schliessen wir zuerst aus, betrachten a, b, c, h als Functionen eines Parameters, und wählen hierzu den Drehungswinkel ν . Dann ist $d\nu$ als unendlich klein gleich dem Winkel zwischen der Ebene (e) und ihrer Consecutiven

$$(a + \partial a)x + (b + \partial b)y + (c + \partial c)z = h + \partial h$$

und wird nach §. 8. (10) bestimmt durch

$$4 \sin^2 \frac{\partial \nu}{2} = \partial a^2 + \partial b^2 + \partial c^2$$

oder, sofern $d\nu$ unendlich klein, durch

$$\partial \nu^2 = \partial a^2 + \partial b^2 + \partial c^2 \quad (14)$$

Im Folgenden mögen Derivationen nach ν durch Accente bezeichnet sein; dann hat man:

$$a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1 \quad (15)$$

Nach (7) wird die Coincidenzlinie bestimmt durch die Gl. (e) und ihre Derivation nach dem Parameter

$$a'x + b'y + c'z = h' \quad (e')$$

Letztere drückt eine Ebene aus, deren Richtungscosinus infolge (15) a' , b' , c' sind, und welche die Ebene (e) nach §. 8. (9) rechtwinklig schneidet; denn durch Differentiation der Gleichung

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1 \quad (1)$$

erhält man:

$$aa' + bb' + cc' = 0 \quad (16)$$

Daher sind nach §. 16. (29) die Richtungscosinus der Coincidenzlinie:

$$a_1 = \left| \frac{bb'}{cc'} \right|; \quad b_1 = \left| \frac{cc'}{aa'} \right|; \quad c_1 = \left| \frac{aa'}{bb'} \right| \quad (17)$$

und ihre Gleichungen

$$\frac{x - \alpha_1}{a_1} = \frac{y - \beta_1}{b_1} = \frac{z - \gamma_1}{c_1} \quad (1_1)$$

wo nach §. 16. (30) (31)

$$\alpha_1 = ah + a'h'; \quad \beta_1 = bh + b'h'; \quad \gamma_1 = ch + c'h' \quad (18)$$

§. 39. Coincidenzpunkt.

Zur Bestimmung des Coincidenzpunkts hat man nach (9) zu den Gl. (e) (e') als dritte die Gleichung

$$a''x + b''y + c''z = h'' \quad (e'')$$

hinzuzunehmen. Setzt man

$$\Delta = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} \quad (19)$$

so werden seine Coordinaten

$$\alpha = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} h & h' & h'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}; \quad \beta = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ h & h' & h'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix}; \quad \gamma = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ h & h' & h'' \end{vmatrix} \quad (20)$$

§. 40. Bewegung der Coincidenzlinie.

Der Punkt $(\alpha\beta\gamma)$ ist Drehpunkt der Geraden (l_1) , ihre Rotation ist weiter zu untersuchen. Man hat, sofern (l_1) auf den Normalen von (e) und (e') senkrecht steht, und nach (19) die 3 Gleichungen:

$$\begin{aligned} aa_1 + bb_1 + cc_1 &= 0 \\ a'a_1 + b'b_1 + c'c_1 &= 0 \\ a''a_1 + b''b_1 + c''c_1 &= \Delta \end{aligned} \quad (21)$$

Differentiirt man die ersten beiden nebst der folgenden

$$a_1^2 + b_1^2 + c_1^2 = 1$$

so findet man mit Beachtung der zweiten und dritten:

$$\begin{aligned} a\partial a_1 + b\partial b_1 + c\partial c_1 &= 0 \\ a'\partial a_1 + b'\partial b_1 + c'\partial c_1 &= -\Delta\partial\nu \\ a_1\partial a_1 + b_1\partial b_1 + c_1\partial c_1 &= 0 \end{aligned}$$

Diese Gleichungen einzeln mit a, a', a_1 multiplicirt, dann addirt geben bei Erwägung, dass die Axen der x, y, z drei auf einander senkrechte Gerade mit den Richtungscosinus $(aa'a_1)$ $(bb'b_1)$ $(cc'c_1)$ gegen die Normalen der Ebenen $(e), (e')$ und gegen (l_1) sind:

$$\partial a_1 = -\Delta\partial a; \quad \partial b_1 = -\Delta\partial b; \quad \partial c_1 = -\Delta\partial c \quad (22)$$

Bezeichnet also ν_1 den Drehungswinkel der Coincidenzlinie (l_1) , so ist nach (14)

$$\partial\nu_1 = \Delta\partial\nu \quad (23)$$

Nach §. 19. ist der erste Richtungscosinus der momentanen Rotationsaxe als gemeinsamen Lotes auf (l_1) und ihre Consecutive

$$\frac{1}{\sin\partial\nu_1} \begin{vmatrix} b_1 & b_1 + \partial b_1 \\ c_1 & c_1 + \partial c_1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & \frac{\partial b_1}{\partial\nu_1} \\ c_1 & \frac{\partial c_1}{\partial\nu_1} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} b_1 & b' \\ c_1 & c' \end{vmatrix} = a$$

d. h. die Coincidenzlinie rotirt momentan um die folgende Normale der Ebene (e) :

$$\frac{x-\alpha}{a} = \frac{y-\beta}{a} = \frac{z-\gamma}{c} \quad (1)$$

Differentiirt man die Coordinaten (18) des Ausgangspunkts von (l_1) , so kommt:

$$\left. \begin{aligned} \alpha'_1 &= (a + a'')h' + (h + h'')a' \\ \beta'_1 &= (b + b'')h' + (h + h'')b' \\ \gamma'_1 &= (c + c'')h' + (h + h'')c' \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Die Strecke vom Ausgangspunkt $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$ bis zum Drehpunkt $(\alpha\beta\gamma)$ von (l_1) ist nach §. 19. dritter Gl. (51), woselbst wegen verschwindender Differenz $r_1 = r$ zu setzen ist,

$$r = - \frac{\partial a_1 \partial \alpha_1 + \partial b_1 \partial \beta_1 + \partial c_1 \partial \gamma_1}{4 \sin^2 \frac{\partial \nu_1}{2}} \quad \text{oder}$$

$$r = - \frac{1}{\Delta^2} (a'_1 \alpha'_1 + b'_1 \beta'_1 + c'_1 \gamma'_1)$$

Führt man die gefundenen Werte ein, so ergibt sich:

$$r = \frac{h + h''}{\Delta} \quad (25)$$

§. 41. Bewegung des Coincidenzpunkts.

Um die Bewegung des Coincidenzpunkts zu bestimmen, fügen wir zu den 3 Gleichungen

$$\left. \begin{aligned} a\alpha + b\beta + c\gamma &= h \\ a'\alpha + b'\beta + c'\gamma &= h' \\ a''\alpha + b''\beta + c''\gamma &= h'' \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

als vierte hinzu:

$$a'''\alpha + b'''\beta + c'''\gamma = H$$

Nach Elimination von α, β, γ erhält man:

$$0 = \begin{vmatrix} aa'a''a''' \\ bb'b''b''' \\ cc'c''c''' \\ hh'h''H \end{vmatrix}$$

Sei zur Abkürzung

$$D = \begin{vmatrix} aa'a''a''' \\ bb'b''b''' \\ cc'c''c''' \\ hh'h''h''' \end{vmatrix} \quad (27)$$

Nach Subtraction der vorigen Gleichung ergibt sich:

$$D = \Delta(h''' - H) \quad (28)$$

Differentiirt man nun jede der Gl. (26) mit Beachtung der nächstfolgenden, so kommt:

$$\begin{aligned} a\partial\alpha + b\partial\beta + c\partial\gamma &= 0 \\ a'\partial\alpha + b'\partial\beta + c'\partial\gamma &= 0 \\ a''\partial\alpha + b''\partial\beta + c''\partial\gamma &= (h''' - H)\partial\nu \end{aligned}$$

woraus nach Elimination von $\partial\beta$, $\partial\gamma$:

$$\Delta\partial\alpha = a_1(h''' - H)\partial\nu$$

oder nach (28) und mit Anwendung der Analogie:

$$\partial\alpha = \frac{Da_1\partial\nu}{\Delta^2}; \quad \partial\beta = \frac{Db_1\partial\nu}{\Delta^2}; \quad \partial\gamma = \frac{Dc_1\partial\nu}{\Delta^2} \quad (29)$$

Berechnet man hieraus nach (13) die Weglänge des Punkts $(\alpha\beta\gamma)$ bis zum Consecutiven und dividirt sie durch $d\nu$, so findet man die Geschwindigkeit des Coincidenzpunkts

$$= \frac{D}{\Delta^2}$$

§. 42. Specielle Fälle.

Es bleiben noch specielle Fälle in Betracht zu ziehen. Der Coincidenzpunkt ist fest für $D = 0$. Er existirt überhaupt nicht, und die Coincidenzlinie bewegt sich parallel, wenn $\Delta = 0$. Hier sind a_1, b_1, c_1 constant, und man erhält durch Differentiation der Gl. (16) (15) und nach (21):

$$\begin{aligned} aa'' + bb'' + cc'' &= -1 \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' &= 0 \\ a_1a'' + b_1b'' + c_1c'' &= \Delta = 0 \end{aligned}$$

woraus:

$$a'' = -a; \quad b'' = -b; \quad c'' = -c$$

so dass die Gl. (24) übergehen in:

$$\partial\alpha_1 = (h + h'')\partial\alpha; \quad \partial\beta_1 = (h + h'')\partial\beta; \quad \partial\gamma_1 = (h + h'')\partial\gamma \quad (30)$$

Die Ausweichung ∂f_1 der Coincidenzlinie ist nun gleich dem Abstand des Punkts $(\alpha_1 + \partial\alpha_1, \beta_1 + \partial\beta_1, \gamma_1 + \partial\gamma_1)$ von ihr, und zwar nach §. 17.

$$\partial f_1^2 = \partial\alpha_1^2 + \partial\beta_1^2 + \partial\gamma_1^2 - l^2$$

wo nach (34)

$$l = a_1\partial\alpha_1 + b_1\partial\beta_1 + c_1\partial\gamma_1 = 0$$

Führt man die Werte (30) ein und dividirt durch $d\nu$, so erhält man als Ausweichungsgeschwindigkeit:

$$f'_1 = h + h'' \quad (31)$$

Ist also gleichzeitig $\mathcal{A} = 0$ und $h + h'' = 0$, so ist die Coincidenzlinie fest.

Die Richtung der Ausweichung ist offenbar die Normale der Ebene (e'), weil sie die Ebene (e) in der Coincidenzlinie normal schneidet.

Bei blosser Parallelbewegung der Ebene sind a, b, c constant. Die Ausweichung ist nach der Schlussbemerkung zur Aufgabe VI. $= dh$, also die Ausweichungsgeschwindigkeit gleich der, mit welcher h wächst.

§. 43. Resultate.

Fassen wir die Resultate zusammen, so sind bei Bewegung einer Ebene (e) folgende, theils coordinirte, theils subordinirte 8 Fälle zu unterscheiden.

1) Sind die Richtungscosinus a, b, c constant, so bewegt sich die Ebene ohne zu rotiren mit der Geschwindigkeit der Variation von h in normaler Richtung, hat keine Coincidenzlinie und keine Umhüllungsfläche.

2) Sind a, b, c nicht sämmtlich constant, so hat die Ebene die Coincidenzlinie (l_1) mit den Bestimmungen (17) (18), um welche sie momentan mit der Geschwindigkeit des Wachsens von v (bestimmt durch Gl. (14)) rotirt. Diese werde in den folgenden 6 Unterfällen als Einheit der Geschwindigkeit betrachtet.

3) Ist (definirt durch (19)) $\mathcal{A} = 0$, so hat die Coincidenzlinie eine constante Richtung, und die Ebene bleibt beständig einer festen Geraden parallel. Hierzu gehören die Unterfälle 4) und 5).

4) Ist zugleich $\mathcal{A} = 0$ und $h + h'' = 0$, so ist die Coincidenzlinie fest; die Ebene rotirt dauernd um sie und hat keine Umhüllungsfläche.

5) Ist nur $\mathcal{A} = 0$, aber nicht $h + h'' = 0$, so bewegt sich die Coincidenzlinie ohne zu rotiren mit der Geschwindigkeit $h + h''$ längs ihrer Normale, deren Richtungscosinus a', b', c' sind, hat keinen Coincidenzpunkt, keine Umhüllungsfläche, und erzeugt die cylindrische Umhüllungsfläche der Ebene.

6) Ist $\mathcal{A}$ nicht $= 0$, so hat die Coincidenzlinie, und somit die Ebene, einen Coincidenzpunkt im Abstände $\frac{h + h''}{\mathcal{A}}$ vom Ausgangspunkt (18) mit den Coordinaten α, β, γ bestimmt durch Gl. (20), und rotirt momentan mit der Geschwindigkeit $\mathcal{A}$ um die Gerade (1). Hierzu gehören die Unterfälle 7) und 8).

7) Ist Δ nicht $= 0$, dagegen (definirt durch (27)) $D=0$, so ist der Coincidenzpunkt fest, und die Coincidenzlinie erzeugt eine konische Fläche, welche die beständig durch jenen festen Punkt gehende Ebene umhüllt.

8) Ist weder $\Delta = 0$ noch $D = 0$, so bewegt sich der Coincidenzpunkt mit der Geschwindigkeit $\frac{D}{\Delta^2}$ momentan in der Richtung der Coincidenzlinie und beschreibt deren Umhüllungslinie, die Gratlinie der von der Coincidenzlinie erzeugten Umhüllungsfläche der Ebene. Nur in diesem Falle wird die Ebene von einer Tangentenfläche umhüllt.

VI. Capitel.

Bewegung einer Geraden.

§. 44. Drehpunktsabstand und Ausweichung.

Die Gleichung einer bewegten Geraden sei

$$\frac{x - \alpha}{a} = \frac{y - \beta}{b} = \frac{z - \gamma}{c} \quad (1)$$

wo, mit Ausschluss des Falles einer blossen Parallelbewegung $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ Functionen eines Parameters, nämlich des Drehungswinkels ν , bestimmt durch Gl. (14) seien. Die Relationen zwischen den Richtungscosinus a, b, c und ihren Derivirten bleiben in Geltung, wie sie im vorigen Abschnitt aufgestellt sind; a_1, b_1, c_1 sind also auch hier die Richtungscosinus der momentanen Rotationsaxe. Der Drehpunkt $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$, als Schnitt der momentanen Rotationsaxe mit der Geraden, bestimmt sich durch die Strecke r vom Ausgangspunkt bis zu ihm: dann ist

$$\alpha_1 = \alpha + ar; \quad \beta_1 = \beta + br; \quad \gamma_1 = \gamma + cr \quad (32)$$

also nach Differentiation

$$\begin{aligned} \partial \alpha_1 &= \partial \alpha + r \partial a + a \partial r \\ \partial \beta_1 &= \partial \beta + r \partial b + b \partial r \\ \partial \gamma_1 &= \partial \gamma + r \partial c + c \partial r \end{aligned}$$

woraus:

$$\left. \begin{aligned} a \partial \alpha_1 + b \partial \beta_1 + c \partial \gamma_1 &= (a \alpha' + b \beta' + c \gamma' + r') \partial \nu = \partial s_0 \\ a' \partial \alpha_1 + b' \partial \beta_1 + c' \partial \gamma_1 &= (a' \alpha' + b' \beta' + c' \gamma' + r) \partial \nu \\ a_1 \partial \alpha_1 + b_1 \partial \beta_1 + c_1 \partial \gamma_1 &= (a_1 \alpha' + b_1 \beta' + c_1 \gamma') \partial \nu = \partial f \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Nun ergibt die dritte Gl. (51) §. 19. auf die Gerade (l) und ihre Consecutive angewandt:

$$a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + r = 0 \quad (34)$$

Ferner ist nach §. 19. Gl. (50) der normale Abstand beider

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sin d\nu} \begin{vmatrix} a & a + \partial a & \partial a \\ b & b + \partial b & \partial b \\ c & c + \partial c & \partial c \end{vmatrix} &= \partial \nu \begin{vmatrix} a & a' & \alpha' \\ b & b' & \beta' \\ c & c' & \gamma' \end{vmatrix} \\ &= (a_1\alpha' + b_1\beta' + c_1\gamma')\partial \nu = \partial f \end{aligned}$$

folglich ist der Drehpunktsabstand

$$r = - (a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma') \quad (35)$$

die Ausweichungsgeschwindigkeit

$$f' = \begin{vmatrix} a & a' & \alpha' \\ b & b' & \beta' \\ c & c' & \gamma' \end{vmatrix} \quad (36)$$

§. 45. Bewegung des Drehpunkts.

Bezeichnet s den Weg des Drehpunkts, und man dividirt die Gl. (33) durch ∂s , so stellen nach §. 8. (7) die 3 linken Seiten die Richtungscosinus der Tangente der Bahn nach den Richtungen der Geraden (l), nach der Normale der Bahnebene

$$a'(x - \alpha) + b'(y - \beta) + c'(z - \gamma) = 0 \quad (37)$$

und nach der Rotationsaxe

$$\frac{x - \alpha_1}{a_1} = \frac{y - \beta_1}{b_1} = \frac{z - \gamma_1}{c_1} \quad (38)$$

dar, also, wie sie geschriben stehen, die Projectionen von ∂s auf die genannten 3 Geraden. Demnach bezeichnet ∂s_0 die Verschiebung des Drehpunkts längs der Geraden (l), ∂f längs der Rotationsaxe (l_1), während in der zweiten Richtung nach (34) die Verschiebung null ist. Nimmt man die Summe ihrer Quadrate, so erhält man:

$$\partial s^2 = \partial \alpha_1^2 + \partial \beta_1^2 + \partial \gamma_1^2 = \partial s_0^2 + \partial f^2 \quad (39)$$

und die Bewegung des Drehpunkts zerlegt sich in eine längs (l) mit der Geschwindigkeit

$$s_0' = a\alpha' + b\beta' + c\gamma' + r' \quad (40)$$

und in eine längs (l_1) mit der Geschwindigkeit f' s. Gl. (36).

Denkt man die Gerade ihre 2 Bewegungen nach einander erleidend, so wird sie die Rotation längs einer Ebene ausführen, deren Gleichung nach §. 19. Gl. (53) ist:

$$\begin{vmatrix} a & a' & x - \alpha \\ b & b' & y - \beta \\ c & c' & z - \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad (41)$$

In dieser selben Ebene bewegt sie sich momentan im Fall $f' = 0$.

§. 46. Parallelbewegung.

Wenn die Gerade sich bei unveränderter Richtung bewegt, also a, b, c constant sind, so hat man zunächst ihre Ausweichung anzugeben. Diese ist als Abstand des consecutiven Ausgangspunkts $(\alpha + \partial\alpha, \beta + \partial\beta, \gamma + \partial\gamma)$ von der Geraden (1) nach §. 17.

$$\partial f = \sqrt{\partial\alpha^2 + \partial\beta^2 + \partial\gamma^2 - \partial l^2} \quad (42)$$

wo nach (34)

$$\begin{aligned} \partial l &= a\partial\alpha + b\partial\beta + c\partial\gamma \quad \text{oder} \\ l &= a\alpha + b\beta + c\gamma \end{aligned} \quad (43)$$

Ferner ist die Richtung der Ausweichung nach §. 17. Gl. (35) bestimmt durch die Richtungscosinus

$$\frac{\partial\alpha - a\partial l}{\partial f}, \quad \frac{\partial\beta - b\partial l}{\partial f}, \quad \frac{\partial\gamma - c\partial l}{\partial f} \quad (44)$$

Die Ebene, in welcher momentan die Bewegung stattfindet, d. i. die Ebene, welche durch (1) und den consecutiven Ausgangspunkt geht, hat nach §. 17. Gl. (37) die Gleichung:

$$\begin{vmatrix} a & \frac{\partial\alpha}{\partial f} & x - \alpha \\ b & \frac{\partial\beta}{\partial f} & y - \gamma \\ c & \frac{\partial\gamma}{\partial f} & z - \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad (45)$$

§. 47. Resultate.

Bei Aufstellung der Resultate haben wir 6 Fälle zu unterscheiden.

1) Sind die Richtungscosinus a, b, c der bewegten Geraden (1) constant, so rückt sie ohne zu rotiren mit der Geschwindigkeit $\frac{\partial f}{\partial t}$

(bestimmt durch Gl. (42), (43)) längs ihrer durch die Richtungscosinus (44) bestimmten Normale fort, hat keinen Coincidenzpunkt und keine Umhüllungslinie, und erzeugt eine cylindrische, die Ebene (45) umhüllende Fläche.

2) Sind a , b , c nicht sämtlich constant, so rotirt die Gerade momentan mit der Geschwindigkeit des Wachsens von ν (bestimmt durch Gl. (14)) um die Gerade (38) ausgehend vom Drehpunkt $(\alpha_1\beta_1\gamma_1)$, dessen Coordinaten die Gl. (32) darstellen, und dessen Abstand r von $(\alpha\beta\gamma)$ aus (35) zu ersehen, in der Richtung $(a_1b_1c_1)$ (bestimmt durch die Werte (17)). In den folgenden 4 Unterfällen ist als Einheit der Geschwindigkeit die des Wachsens von ν angenommen.

3) Ist (definirt durch (36)) $f' = 0$, so hat die Gerade den Coincidenzpunkt (32), somit dessen geometrischen Ort zur Umhüllungslinie, und beschreibt eine abwickelbare Fläche, die Umhüllungsfläche der Ebene (41), deren Coincidenzlinie sie ist. Hierzu gehören 4) 5) als Unterfälle.

4) Ist $f' = 0$ und zugleich (definirt durch (40)) $s_0' = 0$, so ist der obengenannte Coincidenzpunkt fest, die Gerade hat keine Umhüllungslinie und beschreibt eine konische Fläche.

5) Ist $f' = 0$, aber nicht $s_0' = 0$, so beschreibt der genannte Coincidenzpunkt, indem er mit der Geschwindigkeit s_0' momentan längs der Geraden vorrückt, deren Umhüllungslinie, die Gratlinie der von der Geraden gleichzeitig erzeugten Tangentenfläche.

6) Ist f' nicht $= 0$, so lässt sich die Bewegung der Geraden zusammensetzen aus der im zweiten Falle genannten Rotation und einer gleichzeitigen Ausweichung mit der Geschwindigkeit f' . Sie hat keinen Coincidenzpunkt, ist keine Coincidenzlinie einer Ebene, und beschreibt eine windschiefe Regelfläche. Ihr Drehpunkt rückt mit den gleichzeitigen Geschwindigkeiten s_0' und f' bzhw. längs der Geraden und der momentanen Rotationsaxe fort.

Dritter Abschnitt.

Theorie der Curven.

I. Capitel.

Bestimmungsgrößen.

§. 48. Bogen, Tangente, Normalebene.

Eine Curve ist stets aufzufassen als die Bahn eines bewegten Punktes. Sie kann daher keine gesonderten, sich schneidenden oder berührenden Zweige oder singulären Punkte haben, vielmehr heissen solche Zweige ebensovile Curven.

Der analytische Ausdruck einer Curve ist die Bestimmung der Coordinaten eines Punkts als Functionen eines Parameters

$$x = x(u); \quad y = y(u); \quad z = z(u)$$

Diese Functionen sind notwendig reell, eindeutig und stetig, und zwar ist für den Begriff der Stetigkeit die Bedingung massgebend, dass die Gleichungen eine zusammenhängende Curve darstellen, welche der Punkt (xyz) erzeugt, wenn der Parameter u beständig wachsend alle Werte innerhalb eines Intervalls durchläuft.

Tangente im Punkte P an die Curve s heisst die finale Gerade einer durch P und seinen consecutiven Punkt P' gezogenen Geraden, momentane Richtung der Curve im Punkte P die Richtung dieser Tangente.

Die Coordinaten des consecutiven Punkts sind

$$x(u + \partial u), \quad y(u + \partial u), \quad z(u + \partial u)$$

mithin die Richtungscosinus der Sehne $PP' = r$

$$\frac{x(u + \partial u) - x(u)}{r}, \quad \frac{y(u + \partial u) - y(u)}{r}, \quad \frac{z(u + \partial u) - z(u)}{r}$$

Dass diese 3 Ausdrücke Grenzwerte haben müssen, welche alsdann sind

$$\frac{\partial x(u)}{\partial u} \lim \frac{\partial u}{r}, \quad \frac{\partial y(u)}{\partial u} \lim \frac{\partial u}{r}, \quad \frac{\partial z(u)}{\partial u} \lim \frac{\partial u}{r}$$

dass mithin immer eine Tangente existirt, geht aus folgender Betrachtung hervor. Bewegt sich P' zurück bis P , so ist während der Dauer der Bewegung die Lage von PP' und ihrer Verlängerung stets durch 2 Punkte bestimmt. Aus bestimmter Bewegung kann am Schluss nur eine bestimmte Lage resultiren, also befindet sich die Gerade im Augenblick des Zusammentreffens von P' mit P in einer bestimmten Geraden T . Der Winkel zwischen T und PP' ist unendlich klein, weil PP' bis in T gelangen kann, folglich ist fürs erste T finale Gerade von PP' . Ferner ist jener unendlich kleine Winkel nicht kleiner als die Differenz der Richtungswinkel von T und PP' , weil alle drei Winkel Seiten einer dreiseitigen Ecke sind, folglich differiren auch die Cosinus dieser Richtungswinkel unendlich wenig von einander, w. z. b. w.

Die Länge eines Curvenbogens s von einem beliebigen festen Punkte bis zum laufenden Punkte P würde einer besondern Definition bedürfen. Diese lässt sich jedoch einfacher durch das Axiom ersetzen, dass das unendlich kleine Increment ∂s dividirt durch seine Sehne r den Grenzwert 1 hat.

Dass ferner $\frac{\partial s}{\partial u}$ einen, im allgemeinen endlichen Grenzwert hat, können wir annehmen, indem wir einen Parameter verwerfen, welcher dem nicht genügt. Ein möglicher Parameter, s selbst, existirt immer.

Hiernach hat $\frac{\partial u}{r}$ einen Grenzwert $= \frac{\partial u}{\partial s}$, und die Richtungscosinus der Tangente sind nun:

$$f = \frac{\partial x}{\partial s}, \quad g = \frac{\partial y}{\partial s}, \quad h = \frac{\partial z}{\partial s} \quad (1)$$

Da deren Quadratsumme $= 1$ ist, so hat man:

$$\partial s^2 = \partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2 \quad (2)$$

Zugleich ist hiermit bewiesen, dass die Coordinaten des laufenden Punkts einer Curve stets Functionen des Bogens sind, die sich differentiiren lassen. Der Beweis für ihre Differentiabilität bis zu dritter Ordnung wird, sobald die geometrische Darstellung vorliegt, ganz analog geführt, weshalb wir ihn übergehen.

Bezeichnen wir die Coordinaten eines variirenden Punkts auf irgend einer andern Linie oder Fläche ausser der Curve durch ξ, η, ζ , so sind die Gleichungen der Tangente:

$$\frac{\xi - x}{f} = \frac{\eta - y}{g} = \frac{\zeta - z}{h} \quad (3)$$

Durch dieselben Größen wird auch eine Ebene bestimmt, welche normal zur Tangente durch (xyz) geht. Sie heisst die Normalebene der Curve, und ihre Gleichung ist:

$$f(\xi - x) + g(\eta - y) + h(\zeta - z) = 0 \quad (4)$$

§. 49. Charakterisirung der Curve aus der Bewegung ihrer Normalebene.

Es soll jetzt die Bewegung der Normalebene analytisch dargestellt werden, die sie bei Variation des Parameters oder bei Fortrücken des laufenden Punkts längs der Curve vollführt. Um hierauf die Formeln der kinematischen Grundlage der Curventheorie anzuwenden, haben wir für a, b, c zu setzen f, g, h . Aus disen erhält man zunächst den Rotationswinkel ν , welcher für die Normalebene mit τ bezeichnet sei, und Krümmungswinkel heisse, und der nach §. 35. 39 bestimmt ist durch

$$\partial\tau^2 = \partial f^2 + \partial g^2 + \partial h^2 \quad (5)$$

Diese Grösse τ ist jetzt als Parameter zu betrachten, und die Differentiation nach τ durch Accente zu bezeichnen. Dann sind nach den Gl (e') (16) f', g', h' die Richtungscosinus einer auf der Normalebene senkrechten Ebene, welche erstere in ihrer Coincidenzlinie, genannt Krümmungsaxe, schneidet. Deren Richtungscosinus l, m, n sind in den Formeln für a_1, b_1, c_1 zu substituieren.

Hiermit sind 3 auf einander senkrechte Richtungen bestimmt. Wir ziehen vom Punkte (xyz) in gleichen Richtungen 3 Gerade. Die erste, normal zur Normalebene, ist die Tangente, die zweite normal zur zweiten Ebene, heisst die Hauptnormale, die dritte, in der Richtung der Krümmungsaxe, die Binormale, alle drei in dieser Reihenfolge die begleitenden Axen der Curve. Ihre Richtungscosinus sind demnach:

$$\left. \begin{array}{lll} \text{Tangente} & f, & g, & h \\ \text{Hauptnormale} & f', & g', & h' \\ \text{Binormale} & l, & m, & n \end{array} \right\} \quad (6)$$

Vermöge ihrer senkrechten Stellung bestehen folgende 22 Relationen:

$$\left. \begin{array}{ll} f^2 + g^2 + h^2 = 1 & f'l + g'm + h'n = 0 \\ f'^2 + g'^2 + h'^2 = 1 & lf + mg + nh = 0 \\ l^2 + m^2 + n^2 = 1 & ff' + gg' + hh' = 0 \end{array} \right\} \quad (7)$$

$$\left. \begin{aligned} f^2 + f'^2 + l^2 &= 1 & gh + g'h' + mn &= 0 \\ g^2 + g'^2 + m^2 &= 1 & hf + h'f' + nl &= 0 \\ h^2 + h'^2 + n^2 &= 1 & fg + f'g' + lm &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{f} \begin{vmatrix} g' & m \\ h' & n \end{vmatrix} &= \frac{1}{g} \begin{vmatrix} h' & n \\ f' & l \end{vmatrix} = \frac{1}{h} \begin{vmatrix} f' & l \\ g' & m \end{vmatrix} = \\ \frac{1}{f'} \begin{vmatrix} m & g \\ n & h \end{vmatrix} &= \frac{1}{g'} \begin{vmatrix} n & h \\ l & f \end{vmatrix} = \frac{1}{h'} \begin{vmatrix} l & f \\ m & g \end{vmatrix} = \\ \frac{1}{l} \begin{vmatrix} g & g' \\ h & h' \end{vmatrix} &= \frac{1}{m} \begin{vmatrix} h & h' \\ f & f' \end{vmatrix} = \frac{1}{n} \begin{vmatrix} f & f' \\ g & g' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f & f' & l \\ g & g' & m \\ h & h' & n \end{vmatrix} = 1 \end{aligned} \quad (9)$$

Normal zu den begleitenden Axen gehen durch (xyz) 3 Ebenen, welche in gleicher Reihenfolge die Namen haben: Normalebene, rectificirende Ebene, Schmiegungebene, und den gemeinsamen: begleitende Hauptebenen. Die Gleichungen der so bestimmten Geraden und Ebenen sind also:

$$\left. \begin{aligned} \text{Hauptnormale} \quad \frac{\xi - x}{f'} &= \frac{\eta - y}{g'} = \frac{\zeta - z}{h'} \\ \text{Binormale} \quad \frac{\xi - x}{l} &= \frac{\eta - y}{m} = \frac{\zeta - z}{n} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{Rectificirende Ebene} \quad f'(\xi - x) + g'(\eta - y) + h'(\zeta - z) &= 0 \\ \text{Schmiegungebene} \quad l(\xi - x) + m(\eta - y) + n(\zeta - z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

Die Bewegung der Krümmungsaxe als Coincidenzlinie der Normalebene wird bestimmt durch die Gl. (23) (19) (22) §. 41. 40., die, wenn ϑ ihren Rotationswinkel, den Torsionswinkel der Curve, bezeichnet, lauten:

$$\partial\vartheta = \vartheta' \partial\tau; \quad \vartheta' = \begin{vmatrix} f & f' & f'' \\ g & g' & g'' \\ h & h' & h'' \end{vmatrix} \quad (12)$$

$$\partial l = -f' \partial\vartheta; \quad \partial m = -g' \partial\vartheta; \quad \partial n = -h' \partial\vartheta$$

Hieraus und nach Definition des Rotationswinkels hat man:

$$\partial\vartheta^2 = \partial l^2 + \partial m^2 + \partial n^2 \quad (13)$$

Differentiirt man, um die Lage der Krümmungsaxe vollständig zu erhalten, die Gleichung der Normalebene, so kommt:

$$f'(\xi - x) + g'(\eta - y) + h'(\zeta - z) - \frac{f\partial x + g\partial y + h\partial z}{\partial\tau} = 0$$

oder, da nach (1)

$$f\partial x + g\partial y + h\partial z = (f^2 + g^2 + h^2)\partial s = (f'^2 + g'^2 + h'^2)\partial s$$

ist:

$$f'(\xi - x - f's') + g'(\eta - y - g's') + h'(\zeta - z - h's') = 0$$

Die Gleichung der Normalebene lässt sich schreiben:

$$f(\xi - x - f's') + g(\eta - y - g's') + h(\zeta - z - h's') = 0$$

Beide Ebenen gehen durch denselben Punkt, dessen Coordinaten sind

$$x + s'f', \quad y + s'g', \quad z + s'h'$$

welcher auf der Hauptnormale im Abstand s' vom Punkte (xyz) ligt, und der Krümmungsmittelpunkt heisst. Er ist der Mittelpunkt eines die Curve in (xyz) berührenden Kreises, des Krümmungskreises, dessen Radius, der Krümmungsradius, $= s'$, und dessen Axe die Krümmungsaxe ist. Die Gleichungen der Krümmungsaxe sind demnach

$$\frac{\xi - x - s'f'}{l} = \frac{\eta - y - s'g'}{m} = \frac{\zeta - z - s'h'}{n} \quad (14)$$

Der Rotationswinkel der Hauptnormale und rectificirenden Ebene, den wir Torsionsbogen nennen und mit σ bezeichnen, ist zunächst bestimmt durch

$$\partial\sigma^2 = \partial f'^2 + \partial g'^2 + \partial h'^2 \quad (15)$$

Nun erhält man, indem man die Gleichung

$$f^2 + f'^2 + l^2 = 1$$

differentiirt:

$$ff'\partial\tau + f'\partial f' - lf'\partial\vartheta = 0$$

woraus nach Analogie:

$$\partial f' = l\partial\vartheta - f\partial\tau; \quad \partial g' = m\partial\vartheta - g\partial\tau; \quad \partial h' = n\partial\vartheta - h\partial\tau$$

und nach Einführung der Werte in (15):

$$\partial\sigma^2 = \partial\vartheta^2 + \partial\tau^2 \quad (16)$$

eine Gleichung, die sich auflösen lässt in

$$\partial\vartheta = \partial\sigma \sin \lambda; \quad \partial\tau = \partial\sigma \cos \lambda; \quad \vartheta' = \operatorname{tg} \lambda \quad (17)$$

Die so bestimmte Grösse λ heisst die Krümmungsbreite, ihr Tangens ϑ' das Krümmungsverhältniss der Curve.

Zum Schluss stellen wir um der häufigen Anwendung willen die

Differentialformeln für die Richtungscosinus der begleitenden Axen zusammen. Sie sind:

$$\left. \begin{aligned} \partial f &= f' \partial \tau; & \partial l &= -f' \partial \vartheta; & \partial f' &= (l \sin \lambda - f \cos \lambda) \partial \sigma \\ \partial g &= g' \partial \tau; & \partial m &= -g' \partial \vartheta; & \partial g' &= (m \sin \lambda - g \cos \lambda) \partial \sigma \\ \partial h &= h' \partial \tau; & \partial n &= -h' \partial \vartheta; & \partial h' &= (n \sin \lambda - h \cos \lambda) \partial \sigma \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

An disen Formeln ist zu bemerken, dass jede nur auf eine Coordinatenaxe Bezug hat, also von der Stellung der beiden andern unabhängig ist. Man kann daher die x Axe als willkürliche Gerade ansehen, so dass die y und z Axe nur specielle Lagen derselben sind, und die Formeln der zweiten und dritten Zeile nur dasselbe sagen, wie die der ersten. Da diser Fall, wo eine einzige Axe zur Bestimmung hinreicht, sich nicht nur wiederholen, sondern in den weiter unten folgenden Operationen mit geringen Ausnahmen durchweg gelten wird, so wollen wir alsdann die überflüssigen Analoga weglassen. Die Anmerkung „ x Axe willkürlich“ sagt dann aus, dass jede von deren Lage abhängige Gleichung drei analoge Gleichungen vertritt, die man daraus durch Substitution der Buchstaben (y, g, m) und (z, h, n) für (x, f, l) ableitet.

§. 50. Indicatricen, Torsionslinie, Verdrehung.

Die geometrische Darstellung der Rotationswinkel ist in §. 35. bereits angegeben. Wir wenden das Verfahren jetzt auf die Rotationswinkel τ, ϑ, σ an. Wir ziehen von einem festen Punkte drei Gerade von der Länge $= 1$ in den Richtungen der Tangente, Binormale und Hauptnormale; dann erzeugen deren Endpunkte bei Variation des Parameters drei Curven, die auf einer um den festen Punkt mit der Linieneinheit als Radius beschriebenen Kugel liegen, und die Indicatricen der Tangente, Binormale, Hauptnormale heissen. Die Coordinaten der drei Endpunkte sind die Grössen (6), wenn man den festen Mittelpunkt als Anfangspunkt betrachtet; die Gl. (5) (13) (15) drücken gemäss Gl. (2) aus, dass die Längen der Indicatricen von drei beliebigen Anfängen an gerechnet bzw. $= \tau, \vartheta, \sigma$ sind.

Mit diser Construction verbinden wir eine neue. Die drei Geraden unbegrenzt gedacht lassen sich als ein bewegtes System von Coordinatenaxen betrachten. Die Coordinate eines Punktes in der Richtung der Tangente sei $= \vartheta$, in der Richtung der Binormale $= \tau$, in der Richtung der Hauptnormale $= 0$. Der so bestimmte Punkt $(\vartheta\tau)$ erzeugt dann in der der rectificirenden Ebene parallelen Ebene eine Linie, die Torsionslinie, deren Länge nach Gl. (16) $= \sigma$ ist. Nach (17) sind $\sin \lambda, \cos \lambda$ die Richtungscosinus ihrer Tangente,

mithin ist λ deren Richtungswinkel gegen die τ Axe. Die Gleichung der Torsionslinie

$$f(\vartheta, \tau) = 0$$

nennen wir die specifische Gleichung der Urcurve. Hiermit hängt nun folgendes Theorem zusammen.

Drehen wir das variable Axensystem um einen constanten Winkel Δ um seinen Anfang, so dass die Hauptnormale ihre Richtung nicht ändert, so gehen die Richtungscosinus der Tangente und Binormale der Urcurve f, l über in

$$f_1 = f \cos \Delta + l \sin \Delta; \quad l_1 = -f \sin \Delta + l \cos \Delta \quad (19)$$

woraus durch Differentiation:

$$f_1' \partial \tau_1 = f' \partial \tau \cos \Delta - f' \partial \vartheta \sin \Delta$$

$$f_1' \partial \vartheta_1 = f' \partial \tau \sin \Delta + f' \partial \vartheta \cos \Delta$$

Dividirt man durch $f_1' = f'$ und integrirt unter Voraussetzung gleichzeitigen Anfangs beider Krümmungs- und Torsionswinkel, so kommt:

$$\vartheta_1 = \vartheta \cos \Delta + \tau \sin \Delta; \quad \tau_1 = -\vartheta \sin \Delta + \tau \cos \Delta \quad (20)$$

Das aber sind die Coordinaten desselben Punkts ($\vartheta \tau$) der Torsionslinie in Bezug auf die neuen Axen der $\vartheta_1 \tau_1$; folglich ist die Torsionslinie sammt ihrer Lage in der unveränderten Ebene der $\vartheta \tau$ allen Curven gemein, deren Tangentialrichtungen in der genannten Beziehung stehen.

Aus einer Curve eine andere ableiten, deren Hauptnormale in entsprechenden Punkten gleiche Richtung hat, während die beiderseitigen Tangenten eine constante Neigung Δ zu einander haben, heisse die Curve um den Winkel Δ verdrehen. Der Satz lautet dann:

Die Torsionslinie einer Curve bleibt bei jeder Verdrehung ungeändert.

Für eine ebene Curve ist ϑ constant und lässt sich null setzen. Dann wird nach Verdrehung

$$\vartheta_1 = \tau \sin \Delta; \quad \tau_1 = \tau \cos \Delta$$

also

$$\vartheta_1 = \tau_1 \operatorname{tg} \Delta; \quad \vartheta_1' = \operatorname{tg} \lambda_1 = \operatorname{tg} \Delta; \quad \lambda_1 = \Delta$$

Demnach geht aus einer ebenen Curve durch Verdrehung eine Curve von constanter Krümmungsbreite gleich dem Verdrehungswinkel und linearer specifischer Gleichung, also gerader Torsionslinie hervor. Auf diese Classe von Curven, die wir Curven linearer Torsion nennen, werden wir später zurückkommen.

§. 51. Charakterisirung der Curve aus dem Krümmungskreise.

Eine Curve, welche nur mit einer begrenzten Anzahl von Grössen variiren kann, osculirt eine beliebige Curve in einem Punkte, wenn über alle diese Grössen derart verfügt ist, dass sie sich in diesem, beiden gemeinsamen Punkte so nahe als möglich der beliebigen Curve anschliesst. Hierzu wird erfordert, dass die Differentialquotienten der Coordinaten von niedrigster bis zu höchst möglicher Ordnung, nach beiden Curven genommen in jenem Punkte gleiche Werte haben. Ist die höchste Ordnung für alle drei Coordinaten die n te, so haben die Curven eine Berührung n ter Ordnung.

Der Krümmungskreis ist ein osculirender Kreis, welcher eine Curve in zweiter Ordnung berührt. Dieser soll jetzt ohne Bezugnahme auf seine frühere Definition bestimmt werden. Als ein Kreis überhaupt hat er die Gleichungen:

$$\begin{aligned} l(x-x_0) + m(y-y_0) + n(z-z_0) &= 0 \\ (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 &= \varrho^2 \end{aligned}$$

Die erste drückt aus, dass er in einer Ebene liegt, die durch den Punkt $(x_0y_0z_0)$ geht und die Richtungscosinus l, m, n hat; die zweite, dass sein Abstand von diesem Punkte constant $= \varrho$ ist. Betrachten wir seinen laufenden Punkt (xyz) zugleich als den der Curve s , so ist die Bedingung einer Berührung zweiter Ordnung, dass beide Gleichungen nach zweimaliger Differentiation noch für Kreis und Curve gemeinschaftlich gelten. Man erhält dann:

$$\begin{aligned} lf + mg + nh &= 0 \\ (x-x_0)f + (y-y_0)g + (z-z_0)h &= 0 \\ lf' + mg' + nh' &= 0 \\ (x-x_0)f' + (y-y_0)g' + (z-z_0)h' + s' &= 0 \end{aligned}$$

Da durch diese 6 Gleichungen und die Relation

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

die 7 disponiblen Grössen $l, m, n, x_0, y_0, z_0, \varrho$ bestimmt werden, so osculirt der Kreis. Zur Auflösung setze man die Richtungscosinus des nach dem Berührungspunkt (xyz) gehenden Radius

$$\frac{x_0 - x}{\varrho} = a; \quad \frac{y_0 - y}{\varrho} = b; \quad \frac{z_0 - z}{\varrho} = c \quad (21)$$

dann gehen die erste, 4te und 6te Gleichung über in

$$\begin{aligned}
 al + bm + cn &= 0 \\
 af + bg + ch &= 0 \\
 af' + bg' + ch' &= \frac{s'}{\varrho}
 \end{aligned}
 \tag{22}$$

Hiernach steht der Radius normal zur Tangente und ligt in der Kreisebene; dasselbe gilt nach der 5ten Gleichung auch von der Hauptnormale; folglich fallen beide in eine Gerade zusammen, und man hat:

$$a = \pm f'; \quad b = \pm g'; \quad c = \pm h'$$

Gl. (22) gibt dann $\frac{s'}{\varrho} = \pm 1$. Es ist passend anzunehmen, obwol Sache der Willkür, dass τ beständig mit s wächst. Dann sind s' und ϱ positiv, also das obere Zeichen gültig. Die Lösung ist jetzt folgende. Die Kreisebene ist Schmiegungeebene, der Radius $\varrho = s'$ und die Coordinaten des Mittelpunkts nach (21)

$$x_0 = x + s'f'; \quad y_0 = y + s'g'; \quad z_0 = z + s'h' \tag{23}$$

übereinstimmend mit den Bestimmungen in §. 49.

Die Lösung der vorstehenden Aufgabe führt zur Entwicklung einiger unter den Bestimmungsstücken einer Curve, die in §. 49. sich auf anderm Wege vollständiger ergaben. Der Umstand, dass man lange Zeit die Bestimmungsstücke höherer Ordnung nur vermittelt durch den Krümmungskreis ableitete, eine Methode die eben nur für ebene Curven genügt, ist gewiss ein Haupthinderniss gewesen, welches dem Einblick in die Natur der Curven und der allgemeinen Auffassung der Aufgabe ihrer Theorie entgegenstand. Auch jetzt noch wird es einen unbehaglichen Eindruck machen, dass die Namen der Bestimmungsstücke in §. 49. ganz unmotivirt auftreten. Die Schuld ligt jedoch nicht an dem Verfahren, sondern an der eingebürgerten Benennung, die wir nicht ohne grossen Nachteil abändern können. Mögen die Namen der alten Methode entlehnt bleiben; ihre Grundbedeutung, nach der sie zu definiren sind, muss auf einem allseitig umfassenden Wege gewonnen werden, wie ihn die Bewegung der Normalebene darbietet.

In neuerer Zeit hat man mit Beibehaltung des Princips der Osculation die Einseitigkeit gehoben, welche dem Krümmungskreise eigen ist. Die sich so ergebende Construction soll hiernächst dargestellt werden.

§. 52. Osculirende Spirale.

Der Krümmungskreis lässt sich auffassen als diejenige berührende Curve, welche die momentane Krümmung der gegebenen Curve constant und ihr begleitendes Axensystem momentan besitzt, während die Torsion null ist. Wollen wir nun die Torsion in gleicher Weise wie die Krümmung berücksichtigen, so ist die Aufgabe: eine berührende Curve zu construiren, welcher die im Berührungspunkt stattfindende Krümmung und Torsion der gegebenen Curve constant zu eigen sind, und die im begleitenden Axensystem momentan übereinstimmt.

Die Bestimmungsgrößen der gesuchten Curve seien durch gleiche Buchstaben mit dem Index 0, die momentanen Werte bezüglich auf die gegebene Curve ohne Index bezeichnet. Für erstere sind als constant gegeben $\frac{\partial \tau}{\partial s}, \frac{\partial \vartheta}{\partial s}$, also

$$s_0' = s', \quad \vartheta_0' = \vartheta', \quad \lambda_0 = \lambda, \quad \sigma_0' = \sigma'$$

alle übrigen, variablen Größen müssen im Berührungspunkt in die gegebenen Werte ohne Index übergehen. Nun hat man nach (18):

$$f_0'' = l_0 \operatorname{tg} \lambda - f_0; \quad f'' = l \operatorname{tg} \lambda - f$$

Dis nochmals differentiirt gibt:

$$f_0''' = -f_0' \sigma'^2$$

integriert:

$$f_0'' + f_0 \sigma'^2 = \text{const.} = f'' + f \sigma'^2 = f \operatorname{tg}^2 \lambda + l \operatorname{tg} \lambda$$

oder nach Division durch σ'^2 :

$$\frac{\partial^2 f_0}{\partial \sigma_0^2} + f_0 = (f \sin \lambda + l \cos \lambda) \sin \lambda$$

Hiervon ist das vollständige Integral:

$$f_0 = (f \sin \lambda + l \cos \lambda) \sin \lambda + A \cos \sigma_0 + B \sin \sigma_0 \quad (24)$$

woraus durch Differentiation:

$$f_0' \cos \lambda = -A \sin \sigma_0 + B \cos \sigma_0$$

und in Anwendung auf den Berührungspunkt:

$$\begin{aligned} (f \cos \lambda - l \sin \lambda) \cos \lambda &= A \cos \sigma + B \sin \sigma \\ f' \cos \lambda &= -A \sin \sigma + B \cos \sigma \end{aligned}$$

Eliminirt man A, B , so wird Gl. (24):

$$f_0 = (f \sin \lambda + l \cos \lambda) \sin \lambda + (f \cos \lambda - l \sin \lambda) \cos \lambda \cos (\sigma_0 - \sigma) \\ + f' \cos \lambda \sin (\sigma_0 - \sigma)$$

Multipliziert man mit

$$\partial s_0 = s' \partial \tau_0 = s' \cos \lambda \partial \sigma_0$$

integriert, und bestimmt die Constante der Integration nach dem Functionswerte im Berührungspunkt, so kommt:

$$x_0 - x = s' \cos \lambda \{ (f \sin \lambda + l \cos \lambda) \sin \lambda (\sigma_0 - \sigma) \\ + (f \cos \lambda - l \sin \lambda) \cos \lambda \sin (\sigma_0 - \sigma) \\ + f' \cos \lambda [1 - \cos (\sigma_0 - \sigma)] \} \quad (25)$$

Diese für willkürliche x Axe geltende Gleichung bestimmt die gesuchte Curve im Parameter σ_0 . Geht man zu einem neuen rechtwinkligen Coordinatensystem der $x_1 y_1 z_1$ über, verbunden mit dem ursprünglichen durch die Relation

$$x_0 = x + s' f' \cos^2 \lambda + x_1 (f \sin \lambda + l \cos \lambda) + y_1 (f \cos \lambda - l \sin \lambda) + z_1 f'$$

gültig für willkürliche x Axe, so lauten die Gleichungen:

$$x_1 = s' \sin \lambda \cos \lambda (\sigma_0 - \sigma) \\ y_1 = s' \cos^2 \lambda \sin (\sigma_0 - \sigma) \\ z_1 = - s' \cos^2 \lambda \cos (\sigma_0 - \sigma)$$

Hiernach liegt die Curve auf einer geraden Cylinderfläche

$$y_1^2 + z_1^2 = (s' \cos^2 \lambda)^2$$

deren Axe, die x_1 Axe, in ursprünglichen Coordinaten die Gleichungen hat:

$$\frac{\xi - x - s' f' \cos^2 \lambda}{f \sin \lambda + l \cos \lambda} = \frac{\eta - y - s' g' \cos^2 \lambda}{g \sin \lambda + m \cos \lambda} = \frac{\zeta - z - s' h' \cos^2 \lambda}{h \sin \lambda + n \cos \lambda} \quad (26)$$

und deren Radius $= s' \cos^2 \lambda$ ist. Während sie sich mit der Winkelgeschwindigkeit gleich der Variation von σ_0 um den Cylinder windet, rückt sie proportional $\sigma_0 - \sigma$ in der Richtung von dessen Axe fort. Das Verhältniss der Tangential- und Axialbewegung ist $1 : \operatorname{tg} \lambda$.

Die gefundene Curve heisst die osculirende Spirale. Nennen wir hiernach den Cylinder, auf dem sie liegt, dessen Axe und Basis, deren Radius und Ebene Spiralcylinder, Spiralenaxe, Spiralenbasis, Spiralenradius, Spiralenbasisebene.

Die Spiralenaxe ist hiernach der rectificirenden Ebene parallel, von der sie um $s' \cos^2 \lambda$ absteht, und macht mit der Binormale nach der Tangente hin den Winkel λ .

§. 53. Schema der Berechnung der Bestimmungsgrößen einer Curve aus ihren Coordinatengleichungen.

Sind die Coordinaten des laufenden Punkts der Curve als Functionen eines Parameters gegeben, so erhält man auf folgendem Wege successive alle übrigen Bestimmungsstücke, und zwar mit jedem Schritte eins.

1. Gegeben sind

$$x, \quad y, \quad z$$

Durch Differentiation erhält man die Werte von

$$\partial x, \quad \partial y, \quad \partial z$$

hieraus das Bogenelement:

$$\partial s = \sqrt{\partial x^2 + \partial y^2 + \partial z^2}$$

und nach Division die Richtungscosinus der Tangente:

$$f = \frac{\partial x}{\partial s}; \quad g = \frac{\partial y}{\partial s}; \quad h = \frac{\partial z}{\partial s}$$

2. Die 3 Operationen wiederholen sich. Durch Differentiation der letzten Resultate erhält man:

$$\partial f, \quad \partial g, \quad \partial h$$

hieraus den Contingenzwinkel der Normalebene:

$$\partial \tau = \sqrt{\partial f^2 + \partial g^2 + \partial h^2}$$

und nach Division die Richtungscosinus der Hauptnormale:

$$f' = \frac{\partial f}{\partial \tau}; \quad g' = \frac{\partial g}{\partial \tau}; \quad h' = \frac{\partial h}{\partial \tau}$$

3. Man bilde aus den Resultaten von 1. und 2. die Determinanten

$$l = \begin{vmatrix} g & g' \\ h & h' \end{vmatrix}; \quad m = \begin{vmatrix} h & h' \\ f & f' \end{vmatrix}; \quad n = \begin{vmatrix} f & f' \\ g & g' \end{vmatrix}$$

zur Darstellung der Richtungscosinus der Binormale, und dividire das Differential eines derselben durch die homologe Grösse aus der vorigen Reihe; dann erhält man den Contingenzwinkel der Schmiegungebene:

$$\partial \vartheta = -\frac{\partial l}{f'} = -\frac{\partial m}{g'} = -\frac{\partial n}{h'}$$

Falls ein Divisor null ist, bleibt mindestens einer der Ausdrücke gültig.

4. Man berechne successive das Krümmungsverhältniss, die Krümmungsbreite und den Contingenzwinkel der rectificirenden Ebenen nach den Formeln:

$$\vartheta' = \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau}; \quad \lambda = \arctg \vartheta'; \quad \partial \sigma = \frac{\partial \tau}{\cos \lambda} = \frac{\partial \vartheta}{\sin \lambda}$$

5. Durch Integration findet man aus ∂s , $\partial \tau$, $\partial \vartheta$, $\partial \sigma$ den Bogen s , den Krümmungswinkel τ , den Torsionswinkel ϑ und den Torsionsbogen σ .

6. Zu notiren sind noch die Quotienten:

$$\text{Krümmung} = \frac{\partial \tau}{\partial s}; \quad \text{Krümmungsradius} = \frac{\partial s}{\partial \tau}$$

$$\text{Torsion} = \frac{\partial \vartheta}{\partial s}; \quad \text{Torsionsradius} = \frac{\partial s}{\partial \vartheta}$$

$$\text{Totalkrümmung} = \frac{\partial \sigma}{\partial s}$$

Stellen sich f , g , h als Brüche mit gemeinsamen irrationalen Nenner

$$f = \frac{a}{r}; \quad g = \frac{b}{r}; \quad h = \frac{c}{r}$$

dar, so kann man deren Differentiation auf folgendem Wege ganz umgehen. Man hat:

$$a' = fr' + f'r; \quad \text{etc.}$$

$$a'' = fr'' + 2f'r' + f''r; \quad \text{etc.}$$

daher:

$$\begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g & g' \\ h & h' \end{vmatrix} r^2 = lr^2; \quad \text{etc.} \quad (27)$$

$$\begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} f & f' & f'' \\ g & g' & g'' \\ h & h' & h'' \end{vmatrix} r^3 = \vartheta' r^3 \quad (28)$$

Die ersten 3 analogen Gleichungen (27) geben:

$$\begin{vmatrix} b & \partial b \\ c & \partial c \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} c & \partial c \\ a & \partial a \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a & \partial a \\ b & \partial b \end{vmatrix}^2 = r^4 \partial \tau^2$$

Dividirt man sie nach Multiplication mit $\partial \tau$ durch den so gefundenen Wert von $r^2 \partial \tau$, so erhält man l , m , n , und hieraus:

$$f' = \begin{vmatrix} m & g \\ n & h \end{vmatrix}; \text{ etc.}$$

Jetzt stellen sich wider a' , b' , c' in der Form dar:

$$a' = \frac{\alpha}{\varrho}; \quad b' = \frac{\beta}{\varrho}; \quad c' = \frac{\gamma}{\varrho}$$

wo ϱ im allgemeinen irrational ist. Nach gleicher Methode verwandelt sich die Formel (28) in

$$\begin{vmatrix} a & \alpha & \delta\alpha \\ b & \beta & \delta\beta \\ c & \gamma & \delta\gamma \end{vmatrix} = \varrho^2 \delta\vartheta$$

Sind x , y , z nicht explicite in einem Parameter darstellbar, sondern nur $k+2$ Gleichungen zwischen x , y , z und k andern Variabeln gegeben, so hat man nach erster Differentiation alle $k+3$ Differentiale durch eins darzustellen, und nach jeder neuen Differentiation diese Werte dafür einzusetzen. Die Resultate enthalten dann alle primitiven Variabeln als Elemente und sind mit den gegebenen Curvengleichungen zu verbinden.

§. 54. Dimensionen und innere Beziehungen der Curve. Einteilung der Bestimmungsgrößen.

An der vorstehenden Rechnungsfolge lässt sich folgende für die ganze Curventheorie entscheidende Bemerkung machen, welche noch in keiner Schrift Beachtung gefunden hat:

Durch die Operationen 1. ist das Bogenelement vollständig eliminirt, und in keinem Resultate der Operationen 2. bis 5. mehr enthalten.

Hieraus ist der Schluss zu ziehen:

Hat man ein beliebiges System dieser Resultate den Relationen 2. bis 5. gemäss aufgestellt, so lässt sich dasselbe noch mit einer beliebigen Function s des Parameters verbinden, und daraus eine Curve herstellen.

In der That fällt dis sofort in die Augen bei Betrachtung der Gleichungen

$$\partial x = f \partial s; \quad \partial y = g \partial s; \quad \partial z = h \partial s$$

Geometrisch ausgedrückt lautet die Bemerkung und ist nicht weniger unmittelbar einleuchtend: Von jedem Punkte der Curve kann man in tangentialer Richtung eine willkürliche unendlich kleine Strecke bis zum consecutiven Punkt abschneiden, ohne dass dadurch die innern Beziehungen des begleitenden Axensystems einschliesslich der Größen τ , ϑ , σ , λ , welche wir zusammenfassend die innern Beziehungen der Curve nennen wollen, beeinflusst werden. Da diese Strecken ∂s die detaillirten Dimensionen der Curve bezeichnen, so können wir den Satz kurz so ausdrücken:

Die innern Beziehungen einer Curve sind unabhängig von ihren detaillirten Dimensionen.

Nun wird eine Curve (nach Elimination des Parameters) bestimmt durch 2 Functionen. Nimmt man also s zu der einen Function, so bleibt nur eine Function zur Bestimmung der innern Beziehungen übrig. Alle in letztern enthaltenen Functionen sind demnach bestimmt, sobald eine Gleichung zwischen zwei derselben gegeben ist, vorbehaltlich willkürlicher Constanten, die durch Integration hinzukommen. Die Bedeutung der Elimination des Bogenelements drückt folgender Satz aus:

Die Curventheorie lässt sich zerlegen in eine Theorie der innern Beziehungen und eine Theorie der Dimensionen, deren erstere sich ohne Rücksicht auf letztere entwickelt und vollendet.

Wir haben daher bei jedem Problem der Curventheorie diejenigen Größen, welche von den Dimensionen abhängen, als zerlegbare Composita anzusehen, und die Lösung immer erst von Seiten der inneren Beziehungen anzugreifen. Jedes andere Verfahren trägt überflüssige Verwickelungen in die Untersuchung hinein.

Nach dem Vorstehenden sind die Bestimmungstücke der Curve in 2 Classen zu teilen. Zu den dimensionslosen, allein den innern Beziehungen unterworfenen gehören

$$\tau, \vartheta, \sigma, \lambda \text{ und } \begin{cases} f & f' & l \\ g & g' & m \\ h & h' & n \end{cases}$$

Von den Dimensionen abhängig sind

$$s, \frac{\partial \tau}{\partial s}, \frac{\partial \vartheta}{\partial s}, \frac{\partial \sigma}{\partial s} \text{ nebst Reciproken und } \begin{cases} x \\ y \\ z \end{cases}$$

Diese Einteilung wird wider von einer andern gekreuzt. Die 4 erst genannten jeder Classe sind von der Stellung der Coordinatenachsen unabhängig; die letzten, welche immer zu dreien auftreten, ändern ihre Werte mit der Axenstellung. Wir können demgemäss 4 Classen unterscheiden: dimensionslose und mit Dimensionen behaftete Invarianten und Covarianten. Die Aufzählung selbst erklärt die Benennung genügend.

§. 55. Asymptoten.

Asymptote heisst eine feste Gerade, der die Tangente einer Curve unendlich nahe kommt, wenn der Berührungspunkt einen unendlich langen Bogen durchläuft.

Es sollen die Bedingungen der Existenz einer Asymptote einer vorliegenden Curve und ihre Gleichungen aufgestellt werden.

Den Ausgangspunkt der Tangente wollen wir so wählen, dass er nicht mit dem Berührungspunkt in unendliche Ferne rückt. Wir legen ihn deshalb in den Durchschnitt der Tangente mit einer durch den Anfangspunkt der xyz gehenden normalen Ebene. Sind f, g, h die Richtungscosinus der Tangente, so ist die Gleichung dieser Ebene:

$$fx_0 + gy_0 + hz_0 = 0 \quad (29)$$

und die Coordinaten ihres Durchschnitts mit der Tangente im Punkte (xyz)

$$x_0 = x - pf; \quad y_0 = y - pg; \quad z_0 = z - ph \quad (30)$$

wo

$$p = fx + gy + hz$$

gesetzt ist. Bezeichnet man durch r den Radiusvector des Berührungspunkts und setzt

$$x = ur; \quad y = vr; \quad z = wr$$

so wird

$$u^2 + v^2 + w^2 = 1; \quad p = r \frac{\partial r}{\partial s} \quad (31)$$

$$f = u \frac{\partial r}{\partial s} + r \frac{\partial u}{\partial s}; \quad \text{etc.} \quad (32)$$

woraus:

$$1 = f^2 + g^2 + h^2 = \left(\frac{\partial r}{\partial s} \right)^2 + r^2 \frac{\partial u^2 + \partial v^2 + \partial w^2}{\partial s^2}.$$

oder, wenn

$$q^2 = \frac{\partial u^2 + \partial v^2 + \partial w^2}{\partial s^2}$$

gesetzt wird:

$$1 - \left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 = q^2 r^2 \quad (33)$$

Nach Einführung der Werte (31) (32) gehen die Gl. (30) über in

$$x_0 = x - r \frac{\partial r}{\partial s} f = ur \left\{ 1 - \left(\frac{\partial r}{\partial s}\right)^2 \right\} - r^2 \frac{\partial r}{\partial s^2}$$

das ist nach (33)

$$x_0 = ur^3 q^2 - r^2 \frac{\partial r}{\partial s^2} \quad (34)$$

woraus:

$$ux_0 + vy_0 + wz_0 = r^3 q^2 \quad (35)$$

Die Gleichungen der Tangente sind

$$\xi = x_0 + ft; \quad \eta = y_0 + gt; \quad \zeta = z_0 + ht$$

Diese ist einer festen Geraden

$$\xi_0 = \alpha + at; \quad \eta_0 = \beta + bt; \quad \zeta_0 = \gamma + ct \quad (36)$$

unendlich nahe, wenn für jedes t die Differenzen $\xi - \xi_0$, $\eta - \eta_0$, $\zeta - \zeta_0$ unendlich klein sind, was aber immer und nur dann stattfindet, wenn $x_0 - \alpha$, $y_0 - \beta$, $z_0 - \gamma$, $f - a$, $g - b$, $h - c$ unendlich klein sind. Folglich ist jene Gerade (36) Asymptote der Curve s , wenn für $s = \infty$

$$\lim x_0 = \alpha; \quad \lim y_0 = \beta; \quad \lim z_0 = \gamma \quad (37)$$

$$\lim f = a; \quad \lim g = b; \quad \lim h = c \quad (38)$$

ist. Umgekehrt, soll eine Asymptote existieren, so muss entsprechend jedem Punkte der Tangente $(\xi\eta\zeta)$, d. i. für jedes t , auf einer festen Geraden (36) ein Punkt

$$\xi_1 = \alpha + a(t + t_1) = (\alpha + at_1) + at; \quad \text{etc.}$$

liegen, der jenem unendlich nahe ist. Es folgt dann wie oben, dass die 6 Grenzwerte (37) (38) existieren müssen, die wir ohne Rücksicht auf die eingeführten Coordinaten des Ausgangspunkts mit α , β , γ etc. bezeichnen können. Demnach ist die Existenz der 6 Grenzwerte ausreichende und notwendige Bedingung der Existenz einer Asymptote.

Wegen $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ können nicht a , b , c zugleich 0, also nicht f , g , h sämtlich unendlich klein sein. Sofern letztere Grenzwerte haben, ist daher mindestens eins von ihnen endlich. Folglich wächst die entsprechende der 3 Größen

$$x = \int f \partial s, \quad y = \int g \partial s, \quad z = \int h \partial s$$

mit s ins unendliche, mithin ist unter allen Umständen $r = \infty$ für $s = \infty$.

Nun sind u, v, w wegen (31), und x_0, y_0, z_0 nach Voraussetzung, sofern sie Grenzwerte haben, nicht unendlich, folglich ist nach Gl. (35) auch $r^3 q^2$ nicht unendlich. Da aber $r = \infty$, so folgt, dass

$$\lim(r^2 q^2) = \lim \left\{ \left(\frac{r \partial u}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{r \partial v}{\partial s} \right)^2 + \left(\frac{r \partial w}{\partial s} \right)^2 \right\} = 0$$

und da die 3 Terme positiv sind, dass

$$\lim \frac{r \partial u}{\partial s} = 0; \quad \lim \frac{r \partial v}{\partial s} = 0; \quad \lim \frac{r \partial w}{\partial s} = 0$$

ist. Dis auf die Gl. (32) angewandt gibt:

$$a = \lim \frac{u \partial r}{\partial s}; \quad b = \lim \frac{v \partial r}{\partial s}; \quad c = \lim \frac{w \partial r}{\partial s}$$

und nach Bildung der Quadratsumme:

$$\lim \frac{\partial r}{\partial s} = 1 \tag{39}$$

so dass die vorigen Gleichungen übergehen in

$$a = \lim u; \quad b = \lim v; \quad c = \lim w$$

Setzt man diese Grenzwerte und die hypothetischen (37) in Gl. (35) ein, so wird

$$\lim(r^3 q^2) = a\alpha + b\beta + c\gamma$$

Letztere Grösse ist der Grenzwert von $fx_0 + gy_0 + hz_0$, daher nach (29) = 0. Demnach verschwindet der erste Term in den Ausdrücken (34), und man erhält nach Uebergang zur Grenze:

$$\lim x_0 = - \lim \left(r^2 \frac{\partial r \partial u}{\partial s^2} \right); \quad \text{etc.}$$

oder, zufolge (39):

$$\alpha = - \lim \frac{r^2 \partial u}{\partial r}; \quad \beta = - \lim \frac{r^2 \partial v}{\partial r}; \quad \gamma = - \lim \frac{r^2 \partial w}{\partial r}$$

Die Gleichungen der Asymptote lauten jetzt:

$$\frac{\xi + \lim \frac{r^2 \partial u}{\partial r}}{\lim u} = \frac{\eta + \lim \frac{r^2 \partial v}{\partial r}}{\lim v} = \frac{\zeta + \lim \frac{r^2 \partial w}{\partial r}}{\lim w} \tag{40}$$

und die Existenz dieser neuen 6 Grenzwerte ist ausreichende und notwendige Bedingung.

II. Capitel.

Elementaraufgaben.

An die Berechnung der Bestimmungsstücke aus den Coordinatengleichungen schliesst sich die Aufgabe an, aus irgend welchen hinreichenden Relationen die einzelnen Bestimmungsstücke zu finden. Es mag hier genügen, die einfachsten Fälle zu untersuchen und dadurch für allgemeinere Probleme einige Orientirung zu geben. Die Dimensionen werden wir erst am Schluss in Betracht ziehen; daher ist entweder eine Grösse als Function der andern oder zwei Grössen als Functionen eines willkürlichen Parameters gegeben. Sind diese zwei Grössen Glider einer Horizontal- oder Verticalreihe des Systems (6), so ist immer auch das dritte Glid bekannt, weshalb alsdann 3 Data aufgestellt werden.

§. 56. Allgemein definitiv lösbare Aufgaben.

1. Gegeben f, g, h . Die übrigen dimensionslosen Grössen ergeben sich nach dem Rechnungsschema.

2. Gegeben l, m, n . Man findet nach einander:

$$\partial\vartheta = \pm \sqrt{\partial l^2 + \partial m^2 + \partial n^2}$$

$$f' = -\frac{\partial l}{\partial\vartheta}; \quad \text{etc.} \quad f = \begin{vmatrix} g' & m \\ h' & n \end{vmatrix}; \quad \text{etc.}$$

$$\partial\tau = \left(l + \frac{\partial^2 l}{\partial\vartheta^2} \right) \frac{\partial\vartheta}{f}.$$

3. Gegeben f', g', h . Man findet successive:

$$\partial\sigma = \sqrt{\partial f'^2 + \partial g'^2 + \partial h'^2}$$

$$l \sin \lambda - f \cos \lambda = L = \frac{\partial f'}{\partial\sigma}; \quad \text{analog } M \text{ und } N$$

$$f \sin \lambda + l \cos \lambda = F = \begin{vmatrix} g' & M \\ h' & N \end{vmatrix}; \quad \text{etc.}$$

$$\partial\lambda = -\frac{\partial F}{L}; \quad \lambda = \text{const.} - \int \frac{\partial F}{L}$$

Man erhält hiernach eine Schar von Lösungen, welche Verdrehungen von einander sind; f und l ergeben sich aus den 2 vorigen Gleichungen.

4. Gegeben f, f', l . Sei

$$f = \sin \psi; \quad g = \cos \varphi \cos \psi; \quad h = \sin \varphi \cos \psi$$

dann wird

$$\partial \tau = \frac{\partial f}{f'}$$

$$l = \begin{vmatrix} g & g' \\ h & h' \end{vmatrix} = \varphi' \cos^2 \psi = \varphi' (1 - f^2)$$

$$\varphi = \text{const.} + \int \frac{l \partial \tau}{1 - f^2}$$

Von der Constanten hängt nur die Stellung der Curve zum Coordinatenaxensystem ab, indem sie bei deren Variation um die x Axe rotirt. Auf die Data von 4. werden die folgenden Lösungen zurückgeführt.

5. Gegeben f in τ . Man findet durch Differentiation f' , aus beiden l .

6. Gegeben l in ϑ . Man findet durch Differentiation f' , aus beiden f .

7. Gegeben f' in τ . Man findet durch Integration f , aus beiden l .

8. Gegeben f' in ϑ . Man findet durch Integration l , aus beiden f .

9. Gegeben f' in σ . Man findet successive:

$$l \sin \lambda - f \cos \lambda = \frac{\partial f'}{\partial \sigma}$$

$$l \cos \lambda + f \sin \lambda = \sqrt{1 - f'^2 - \left(\frac{\partial f'}{\partial \sigma}\right)^2}$$

$$\lambda = \int \frac{\partial(l \cos \lambda + f \sin \lambda)}{l \sin \lambda - f \cos \lambda}$$

und f, l aus den zwei vorigen Gleichungen.

10. Gegeben f in λ . Man hat

$$l = -f \operatorname{tg} \lambda \partial f$$

aus beiden ergibt sich f' .

11. Gegeben l in λ . Man hat

$$f = -l \cot \lambda \partial l$$

aus beiden ergibt sich f' .

12. Gegeben $f \sin \lambda + l \cos \lambda$, $l \sin \lambda - f \cos \lambda$ und f' , welche Größen die Quadratsumme $= 1$ haben, in einem Parameter. Man findet:

$$\lambda = - \int \frac{\partial(f \sin \lambda + l \cos \lambda)}{l \sin \lambda - f \cos \lambda}$$

somit f und l einzeln.

13. Gegeben $f \sin \lambda + l \cos \lambda$ in λ . Man findet:

$$f \cos \lambda - l \sin \lambda = \frac{\partial(f \sin \lambda + l \cos \lambda)}{\partial \lambda}$$

aus beiden f und l einzeln, dann f' .

14. Gegeben $l \sin \lambda - f \cos \lambda$ in λ . Man findet:

$$f \sin \lambda + l \cos \lambda = - \int (l \sin \lambda - f \cos \lambda) \partial \lambda$$

aus beiden f und l .

15. Gegeben $l \sin \lambda - f \cos \lambda$ in σ . Man findet:

$$f' = f (l \sin \lambda - f \cos \lambda) \partial \sigma$$

$$f \sin \lambda + l \cos \lambda = \sqrt{1 - f'^2 - (l \sin \lambda - f \cos \lambda)^2}$$

das sind die Data der Aufgabe 12.

§. 57. Reduction andrer Aufgaben auf Differentialgleichungen.

16. Gegeben sei l in τ . Sei

$$l = \sin \alpha; \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \vartheta} = \cos 2\mu; \quad \cos \alpha = e^{-\beta}$$

dann wird

$$\partial l = -f' \partial \vartheta = \cos \alpha \partial \alpha = \cos \alpha \cos 2\mu \partial \vartheta$$

$$f' = -\cos \alpha \cos 2\mu$$

$$1 - l^2 = \cos^2 \alpha = f^2 + f'^2, \quad \text{also}$$

$$f = \cos \alpha \sin 2\mu$$

Dis differentiirt gibt:

$$-\cos \alpha \cos 2\mu = -\alpha' \sin \alpha \sin 2\mu + 2\mu' \cos \alpha \cos 2\mu,$$

oder:

$$2\partial \mu + \partial \tau = \partial \alpha \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} 2\mu, *) \quad (41)$$

oder:

*) Die weitere Transformation in Grun. Arch. LVI. 61. ist unrichtig.

$$\frac{2\partial \operatorname{tg} \mu}{1 + \operatorname{tg}^2 \mu} + \partial \tau = \frac{2\partial \beta \operatorname{tg} \mu}{1 - \operatorname{tg}^2 \mu}$$

oder:

$$\frac{\partial \operatorname{tg} 2\mu}{1 + \operatorname{tg}^2 2\mu} + \partial \tau = \partial \beta \operatorname{tg} 2\mu$$

17. Gegeben f in ϑ . Sei

dann wird $f = \sin \gamma; \quad \gamma' = \cos 2\nu; \quad \cos \gamma = e^{-\delta}$

$$\partial f = f' \partial \tau = \cos \gamma \partial \gamma = \cos \gamma \cos 2\nu \partial \tau$$

$$f' = \cos \gamma \cos 2\nu; \quad l = \cos \gamma \sin 2\nu$$

woraus:

$$\frac{\partial l}{\partial \vartheta} = -f' = -\cos \gamma \cos 2\nu = -\frac{\partial \gamma}{\partial \vartheta} \sin \gamma \sin 2\nu + 2 \frac{\partial \nu}{\partial \vartheta} \cos \gamma \cos 2\nu$$

also

$$2\partial \nu + \partial \vartheta = \partial \gamma \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg} 2\nu$$

eine Gleichung von der Form (41) in der vorigen Aufgabe. Man braucht daher nur im Resultat $\gamma, \delta, \vartheta, \nu$ für α, β, τ, μ zu setzen.

18. Gegeben f' in λ . Sei

$$f' = \sin \varepsilon; \quad f \cos \lambda - l \sin \lambda = \cos \varepsilon \cos 2\kappa$$

$$f \sin \lambda + l \cos \lambda = -\cos \varepsilon \sin 2\kappa$$

Differentiirt man die letzte Gleichung, so kommt:

$$\cos \varepsilon \cos 2\kappa \partial \lambda = \sin \varepsilon \sin 2\kappa \partial \varepsilon - 2 \cos \varepsilon \cos 2\kappa \partial \kappa \quad \text{oder}$$

$$2\partial \kappa + \partial \lambda = \partial \varepsilon \operatorname{tg} \varepsilon \operatorname{tg} 2\kappa$$

wider von der Form (41).

19. Gegeben sei ϑ in τ . Man zerlege die Gleichung

$$f^2 + f'^2 + l^2 = 1$$

durch Einführung des imaginären Winkels μ in

$$\left. \begin{aligned} f \cos \mu + f' \sin \mu &= 1 \\ f \sin \mu - f' \cos \mu &= il \end{aligned} \right\} \quad (42)$$

Differentiirt man beide Gleichungen, so kommt:

$$f'(\partial\tau + \partial\mu) \cos \mu + \{l\partial\vartheta - f(\partial\tau + \partial\mu)\} \sin \mu = 0$$

$$f'(\partial\tau + \partial\mu) \sin \mu - \{l\partial\vartheta - f(\partial\tau + \partial\mu)\} \cos \mu = -if'\partial\vartheta$$

woraus:

$$\partial\tau + \partial\mu = -i\partial\vartheta \sin \mu$$

Setzt man

$$\operatorname{tg} \frac{\mu}{2} = \frac{2r'}{r}$$

so geht die Gleichung über in

$$r'' + i\vartheta' r' + \frac{1}{4}r = 0$$

Diese Gleichung hat die Eigenschaft, dass sie durch Substitution

$$r' = q_1 e^{-i\vartheta}$$

in die conjugirte übergeht. Ist also q der conjugirte Wert zu q_1 , so ist q zweite Speciallösung, und

$$Aq + Br \quad (43)$$

das vollständige Integral. Damit dasselbe auch den Gl. (42) genügt, muss sein

$$qq_1 + 4q'q_1' = 2$$

Alsdann hat man für eine beliebige x Axe:

$$f = 1 - qq_1; \quad f' = -q'q_1 - qq_1'; \quad l = l(q'q_1 - qq_1')$$

Es bleibt über die complexen Werte von A, B der Art zu verfügen, dass diese Ausdrücke nach Substitution von (43) für q drei rechtwinkligen Axen entsprechen. Setzt man

$$q = (m + im_1)e^{-\frac{1}{2}i\vartheta}; \quad q' = \frac{1}{2}(n - in_1)e^{-\frac{1}{2}i\vartheta}$$

wo m, m_1, n, n_1 reell sind, und ihr gemeinsamer, bis dahin willkürlicher Factor durch die Gleichung

$$m^2 + m_1^2 + n^2 + n_1^2 = 2$$

zu bestimmen ist, so findet man:

$$\begin{aligned} f &= 1 - m^2 - m_1^2; & g &= mn + m_1n_1; & h &= mn_1 - m_1n \\ f' &= m_1n_1 - mn; & g' &= 1 - m^2 - n_1^2; & h' &= mm_1 + nn_1 \\ l &= mn_1 + m_1n; & \bar{m} &= mm_1 - nn_1; & \bar{n} &= 1 - m_1^2 - n_1^2 \end{aligned}$$

Die ausführliche Behandlung dieser Aufgabe habe ich 1863 in Crelle J. Bd. 63. p. 122. gegeben, deshalb hier nur den Weg der Rechnung und die Resultate aufgeführt.

§. 58. Bestimmung der Dimensionen.

Sollen die Dimensionen einer Curve und durch sie deren Coordinatengleichungen gefunden werden, so müssen entweder zwei Relationen zwischen x, y, z, s gegeben sein, oder eine solche zu den gegebenen innern Beziehungen hinzukommen. Im letztern Falle differentiire man die Relation 3 mal, setze für die Differentiale der Coordinaten ihre Werte (1), und eliminire die primitiven x, y, z . Dann bleibt eine Differentialgleichung für s allein, durch deren Lösungen x, y, z bereits dargestellt sind. Enthält die Relation nur s , so sind x, y, z nach (1) zu finden. Im erstern Falle eliminire man s und ∂s ; dann behält man nach 3 Differentiationen 4 Gleichungen zwischen x, y, z , und nach deren Elimination die innere Relation, wodurch die Aufgabe auf den zweiten Fall zurückgeführt ist. In vielen Fällen wird sich der Weg sehr kürzen, was alsdann meist leicht zu bemerken ist.

§. 59. Einteilung der Curven. Curven linearer Torsion.

Es kann kein Zweifel bestehen, dass die oberste Einteilung der Curven sich nach der Relation zwischen den dimensionslosen Invarianten richten muss; jedes andere Merkmal bringt eine Complication mit sich: die Covarianten verbinden die Lage mit der Beschaffenheit, die Zuziehung der Dimensionen verlangt doppelte Bestimmung. Da die Grössen $\tau, \vartheta, \sigma, \lambda$ leicht aus je zweien unter ihnen hervorgehen, so genügt es, die Relation zwischen τ und ϑ , d. i. die spezifische Gleichung, als Merkmal der Einteilung aufzustellen.

Hiernach bilden die erste oder einfachste Classe die Curven linearer Torsion, für welche

$$\frac{\vartheta}{\tau} = \text{const.}$$

Diese Constante ist dann $= \text{tg } \lambda$, so dass wir die spezifische Gleichung schreiben können:

$$\vartheta \cos \lambda = \tau \sin \lambda \quad (\lambda = \text{const.}) \quad (44)$$

und, indem wir das beiden proportionale σ hinzunehmen:

$$\sigma = \frac{\vartheta}{\sin \lambda} = \frac{\tau}{\cos \lambda}$$

Hieraus ist es leicht, die Stellung des begleitenden Axensystems zu finden; denn man hat:

$$\frac{\partial f'}{\partial \sigma} = l \sin \lambda - f \cos \lambda; \quad \frac{\partial^2 f'}{\partial \sigma^2} = -f'$$

Die letzte Gleichung hat die drei Speciallösungen

$$f' = 0; \quad g' = -\sin \sigma; \quad h' = \cos \sigma$$

deren Quadratsumme $= 1$ ist. Dis differentiiert gibt nach (18):

$$\begin{aligned} l \sin \lambda - f \cos \lambda &= 0, & m \sin \lambda - g \cos \lambda &= -\cos \sigma \\ n \sin \lambda - h \cos \lambda &= -\sin \sigma \end{aligned}$$

woraus nach Determinantenbildung:

$$f \sin \lambda + l \cos \lambda = \begin{vmatrix} g' & m \sin \lambda - g \cos \lambda \\ h' & n \sin \lambda - h \cos \lambda \end{vmatrix} = 1$$

$$g \sin \lambda + m \cos \lambda = \begin{vmatrix} h' & n \sin \lambda - h \cos \lambda \\ f' & l \sin \lambda - f \cos \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$h \sin \lambda + n \cos \lambda = \begin{vmatrix} f' & l \sin \lambda - f \cos \lambda \\ g' & m \sin \lambda - g \cos \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Diese 6 Gleichungen bestimmen pairwise die gesuchten Grössen, deren Werte hiernach sind:

$$\left. \begin{aligned} f &= \sin \lambda; & g &= \cos \lambda \cos \sigma; & h &= \cos \lambda \sin \sigma \\ f' &= 0; & g' &= -\sin \sigma; & h' &= \cos \sigma \\ l &= \cos \lambda; & m &= -\sin \lambda \cos \sigma; & n &= -\sin \lambda \sin \sigma \end{aligned} \right\} \quad (45)$$

Um die Curve, welche hiermit in einer besondern Stellung zum Coordinatenaxensystem dargestellt ist, in eine beliebige Stellung zu übertragen, braucht man nur die Axenstellung beliebig zu verändern; dann gehen zugleich die Speciallösungen der Differentialgleichung in das vollständige Integral über.

In der vorliegenden besondern Stellung erkennt man die bemerkenswerte Eigenschaft der Curven linearen Torsion, dass ihre Hauptnormale beständig auf einer festen Geraden (hier der x Axe) senkrecht steht, mit der die Tangente und Binormale constante Winkel bilden.

Diese Eigenschaft besitzt die Classe ausschliesslich. Denn, gilt eine der 3 Gleichungen

$$f' = 0; \quad f = \text{const.}; \quad l = \text{const.}$$

so folgen nach (18) die beiden andern, und nach Aufg. 4. wird dann φ proportional τ , und analog proportional ϑ . Demnach beweist jede der 3 Gleichungen die Linearität der specifischen Gleichung.

Dass jede Curve linearer Torsion durch Verdrehung um λ in eine ebene Curve übergeht, ist in §. 3. bereits bemerkt. Hiernach bilden alle ebenen Curven einen besondern Fall der in Rede stehenden Curvenklasse.

Die Coordinatengleichungen einer Curve linearer Torsion sind

$$x = s \sin \lambda; \quad y = \cos \lambda \int \cos \sigma \partial s; \quad z = \cos \lambda \int \sin \sigma \partial s$$

wo s beliebige Function von σ ist. Es ist leicht diese so zu wählen, dass nach Elimination von σ zwei algebraische Gleichungen zwischen x, y, s bleiben, z. B. indem man $s = \cos(k\sigma + c)$ setzt, wo k eine Rationalzahl und nicht $= 1$ ist. Nimmt man s proportional σ , so ist die Curve eine Schraubenlinie, wie die osculirende Spirale.

§. 60. Curven cyklischer Torsion und andere Classen.

Aehnliche Eigenschaften hat die Curvenklasse cyklischer Torsion, deren Torsionslinie ein Kreis

$$\tau^2 + \vartheta^2 = \cot^2 \alpha \quad (46)$$

ist. Ein Bogen dieses Kreises ist dann

$$\sigma = \lambda \cot \alpha \quad (47)$$

und die Coordinaten des laufenden Punkts sind

$$\tau = \cot \alpha \sin \lambda; \quad \vartheta = -\cot \alpha \cos \lambda \quad (48)$$

Durch dreimalige Differentiation nach (18) mit Beachtung von (47) erhält man:

$$\frac{\partial f'}{\partial \sigma} = l \sin \lambda - f \cos \lambda$$

$$\frac{\partial^2 f'}{\partial \sigma^2} = (l \cos \lambda + f \sin \lambda) \operatorname{tg} \alpha - f'$$

$$\frac{\partial^3 f'}{\partial \sigma^3} = -\frac{\partial f'}{\partial \sigma} \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

Letzteres integrirt gibt mit Anwendung des Vorhergehenden:

$$\frac{\partial^2 f'}{\partial \sigma^2} + \frac{f'}{\cos^2 \alpha} = c \operatorname{tg} \alpha = (l \cos \lambda + f \sin \lambda + f' \operatorname{tg} \alpha) \operatorname{tg} \alpha$$

oder, wenn

$$a = \frac{1}{\sin \alpha}, \quad \text{also} \quad \frac{\sigma}{\cos \alpha} = a \lambda \quad (49)$$

gesetzt wird:

$$\frac{\partial^2 f'}{a^2 \partial \lambda^2} + f' = c \sin \alpha \cos \alpha \quad (50)$$

$$\left. \begin{aligned} l \cos \lambda + f \sin \lambda + f' \operatorname{tg} \alpha &= c, \text{ und analog} \\ m \cos \lambda + g \sin \lambda + g' \operatorname{tg} \alpha &= c_1 \\ n \cos \lambda + h \sin \lambda + h' \operatorname{tg} \alpha &= c_2 \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

woraus:

$$\left. \begin{aligned} \cos \lambda &= cl + c_1 m + c_2 n \\ \sin \lambda &= cf + c_1 g + c_2 h \\ \operatorname{tg} \alpha &= cf' + c_1 g' + c_2 h' \end{aligned} \right\} \quad (52)$$

Wählt man die Gerade, deren Richtungscosinus sich verhalten wie $c:c_1:c_2$, zur x Axe, so werden c_1 und c_2 null, und c nimmt, damit die Gl. (50) (51) vereinbar seien, den Wert $\frac{1}{\cos \alpha}$ an. Dann hat man zunächst:

$$f = \cos \alpha \sin \lambda; \quad f' = \sin \alpha; \quad l = \cos \alpha \cos \lambda$$

und Gl. (50) lautet für die y und z Axe:

$$\frac{\partial^2 g'}{a^2 \partial \lambda^2} + g' = 0; \quad \frac{\partial^2 h'}{a^2 \partial \lambda^2} + h' = 0$$

Sie wird erfüllt durch:

$$g' = -\cos \alpha \sin a\lambda; \quad h' = \cos \alpha \cos a\lambda$$

Dis in (51) eingeführt gibt:

$$\left. \begin{aligned} m \cos \lambda + g \sin \lambda &= \sin \alpha \sin a\lambda \\ n \cos \lambda + h \sin \lambda &= -\sin \alpha \cos a\lambda \end{aligned} \right\}$$

woraus nach Differentiation:

$$\left. \begin{aligned} -m \sin \lambda + g \cos \lambda &= \cos a\lambda \\ -n \sin \lambda + h \cos \lambda &= \sin a\lambda \end{aligned} \right\}$$

Hiermit sind die 4 noch übrigen Grössen bestimmt, und man hat:

$$\left. \begin{aligned} f &= \cos \alpha \sin \lambda; & g &= \cos \lambda \cos a\lambda + \sin \alpha \sin \lambda \sin a\lambda \\ & & h &= \cos \lambda \sin a\lambda - \sin \alpha \sin \lambda \cos a\lambda \\ f' &= \sin \alpha; & g' &= -\cos \alpha \sin a\lambda; & h' &= \cos \alpha \cos a\lambda \\ l &= \cos \alpha \cos \lambda; & m &= -\sin \lambda \cos a\lambda + \sin \alpha \cos \lambda \sin a\lambda \\ & & n &= -\sin \lambda \sin a\lambda - \sin \alpha \cos \lambda \cos a\lambda \end{aligned} \right\} \quad (53)$$

Das sichtliche Merkmal der Curven cyklischer Torsion ist, dass die Hauptnormale einen constanten schiefen Winkel mit einer festen

Geraden (hier der x Axe) macht. Geht diser Winkel in einen Rechten über, so wird der Radius der Torsionslinie (46) $= \infty$, diese also eine Gerade, die Curve vertauscht ihre Classe.

Auch dieses Merkmal ist zur Definition hinreichend; denn aus $f' = \sin \alpha$ folgt durch Integration:

$$f = \tau \sin \alpha; \quad l = \vartheta \sin \alpha$$

und die Quadratsumme gibt:

$$1 = \sin^2 \alpha (1 + \tau^2 + \vartheta^2)$$

Die Coordinatengleichungen

$$\begin{aligned} x &= \cos \alpha \int \sin \lambda \partial s; & y &= \int \cos \lambda \cos \alpha \lambda \partial s + \sin \alpha \int \sin \lambda \sin \alpha \lambda \partial s \\ z &= \int \cos \lambda \sin \alpha \lambda \partial s - \sin \alpha \int \sin \lambda \cos \alpha \lambda \partial s \end{aligned}$$

wo s beliebige Function von λ , lassen sich für rationales α leicht als algebraische zwischen x, y, z bestimmen.

Sehr einfache Bestimmungen der begleitenden Axen ergeben sich noch für die Curvenklasse, deren spezifische Gleichung ist

$$\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{4} = e^{\tau}$$

worüber Crelle J. Bd. 60. p. 181. Auch für die Parabel als Torsionslinie ist die Lösung in Crelle J. Bd. 63. p. 12. aufgestellt.

§. 61. Bewegung der Binormale und Hauptnormale.

Was über die Bewegung der begleitenden Axen und Hauptebenen zu sagen ist, wird zum grössten Teil im III. Capitel aus allgemeineren Betrachtungen fliessen. Nur einige Fragen, die dadurch nicht ihre Beantwortung finden, mögen im voraus untersucht werden.

Die Rotationswinkel, ϑ für Binormale und σ für Hauptnormale, sind bekannt. Die Richtungs cosinus der momentanen Rotationsachsen sind dieselben wie die der normalen Hauptebenen, also nach §. 38. Gl. (17) für Binormale

$$\left| \begin{array}{c} m \frac{\partial m}{\partial \vartheta} \\ n \frac{\partial n}{\partial \vartheta} \end{array} \right| = - \left| \begin{array}{c} m g' \\ n h' \end{array} \right| = f; \quad \text{etc.}$$

für Hauptnormale

$$\begin{vmatrix} g' & \frac{\partial g'}{\partial \sigma} \\ h' & \frac{\partial h'}{\partial \sigma} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} g' & m \sin \lambda - g \cos \lambda \\ h' & n \sin \lambda - h \cos \lambda \end{vmatrix} = f \sin \lambda + l \cos \lambda; \quad \text{etc.}$$

Es handelt sich nun noch um den Drehpunktsabstand r und die Ausweichungsgeschwindigkeit $\frac{\partial q}{\partial \nu}$. Diese sind nach §. 44. Gl. (35) (36) für Binormale

$$r = - \frac{\partial l \partial x + \partial m \partial y + \partial n \partial z}{\partial \vartheta^2} = 0 \quad (54)$$

$$\frac{\partial q}{\partial \vartheta} = \begin{vmatrix} l & \frac{\partial l}{\partial \vartheta} & \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \\ m & \frac{\partial m}{\partial \vartheta} & \frac{\partial y}{\partial \vartheta} \\ n & \frac{\partial n}{\partial \vartheta} & \frac{\partial z}{\partial \vartheta} \end{vmatrix} = \frac{\partial s}{\partial \vartheta} \quad (55)$$

für Hauptnormale

$$r = - \frac{\partial f' \partial x + \partial g' \partial y + \partial h' \partial z}{\partial \sigma^2} = \frac{\partial s}{\partial \sigma} \cos \lambda = s' \cos^2 \lambda \quad (56)$$

$$\frac{\partial q}{\partial \sigma} = \begin{vmatrix} f' & \frac{\partial f'}{\partial \sigma} & \frac{\partial x}{\partial \sigma} \\ g' & \frac{\partial g'}{\partial \sigma} & \frac{\partial y}{\partial \sigma} \\ h' & \frac{\partial h'}{\partial \sigma} & \frac{\partial z}{\partial \sigma} \end{vmatrix} = \frac{\partial s}{\partial \sigma} \sin \lambda \quad (57)$$

Demnach rotirt die Binormale um die Tangente und gleitet längs derselben mit der Geschwindigkeit des laufenden Punkts. Die Hauptnormale rotirt um die Axe der osculirenden Spirale und gleitet längs derselben mit einer Geschwindigkeit, die sich zu der des laufenden Punkts verhält wie $\sin \lambda$ zu 1. Man kann dafür sagen: der kürzeste Abstand zwischen zwei consecutiven Binormalen und Hauptnormalen ist bzhw. $= \partial s$, $\partial s \sin \lambda$, und wird gemessen bzhw. längs der Tangente und Spiralenaxe.

§. 62. Bewegung des begleitenden Axensystems.

Untersuchen wir noch die momentane Rotation des begleitenden Axensystems. Die Coordinaten eines Punkts der Rotationsaxe in Bezug auf die begleitenden Axen seien $\alpha + ar$, $\gamma + cr$, $\beta + br$, also in Bezug auf die willkürliche x Axe

$$\xi = x + (\alpha + ar)f + (\beta + br)l + (\gamma + cr)f'$$

wo a, b, c momentan constant, α, β, γ nur in der Richtung (a, b, c) verschiebbar sind. Damit sich nun die Rotationsaxe nur längs ihrer selbst verschiebt, ist die Bedingung

$$\partial(x + \alpha f + \beta l + \gamma f') = 0; \quad \partial(af + bl + cf') = 0$$

das ist

$$f(s' - \gamma + ar') + l(\gamma\vartheta' + br') + f'(\alpha - \beta\vartheta' + cr') = 0$$

$$-fc + lc\vartheta + f'(a - b\vartheta') = 0$$

gültig für willkürliche f, l, f' , also

$$c = 0; \quad a = b\vartheta'$$

$$\alpha = \beta\vartheta'; \quad \gamma = s' + ar'; \quad \gamma\vartheta' + br' = 0$$

woraus:

$$a = \sin \lambda; \quad b = \cos \lambda; \quad c = 0$$

$$\alpha = \varepsilon \sin \lambda; \quad \beta = \varepsilon \cos \lambda; \quad \gamma = s' \cos^2 \lambda; \quad r' = -s' \sin \lambda$$

Das willkürliche ε sei $= 0$; dann wird die Gleichung der momentanen Rotationsaxe:

$$\xi = x + f's' \cos^2 \lambda + r(f \sin \lambda + l \cos \lambda) \quad (58)$$

Das begleitende Axensystem rotirt demnach um die Axe der osculirenden Spirale. Diese geht durch die Hauptnormale und steht senkrecht auf ihr. Legt man durch beide eine Ebene, so ist deren Richtungscosinus

$$l \sin \lambda - f \cos \lambda$$

Da sie mit dem System gemeinsam rotirt, so ist das Quadrat der Rotationsgeschwindigkeit die Quadratsumme der analogen Grössen

$$\frac{\partial}{\partial \tau} (l \sin \lambda - f \cos \lambda) = \lambda'(l \cos \lambda + f \sin \lambda) - \sigma' f'$$

das ist

$$= \lambda'^2 + \sigma'^2$$

III. Capitel.

Begleitende Curven.

§. 63. Beziehungen der begleitenden Curven im allgemeinen.

Ist die Lage eines Punkts P_1 relativ zum begleitenden Axensystem einer Curve s für den laufenden Punkt P allein durch Bestimmungsgrössen dieser Curve bestimmt, so erzeugt er bei fortschrei-

tendem P eine Curve s_1 , deren Lauf zu dem der Urcurve s in fester Beziehung steht. Wir nennen dann s_1 eine begleitende Curve von s . Ist die Beziehung von s_1 zu s definirt, so ist sie anwendbar auf jede andre Curve.

Die Beziehung lässt sich umkehren. Man kann nach der Beziehung von s zu s_1 fragen, indem man die Lage des Punktes P relativ zum begleitenden Axensystem von s_1 bestimmt. Dann heisst s die inverse Begleitende von s_1 .

Findet man nun, wie es meistens der Fall ist, für eine gegebene Begleitende s_1 unbegrenzt viele Urcurven s , zu denen s_1 in derselben Beziehung steht, so stehen je zwei solcher Curven s unter sich in neuer Beziehung. Wir nennen dann jede eine Mitinverse der andern. Ihre Beziehung ist reciprok und gibt daher bei Inversion kein neues Resultat.

Der gleiche Fall tritt indes notwendigerweise schon bei der Definition von s_1 aus s ein, wenn die relative Lage von P_1 durch Grössen wie s , τ , ϑ , σ bestimmt ist, welche einen willkürlichen Anfang haben. Unter den Curven s_1 , welche sich dann nur durch constante Differenzen der s , τ , ϑ , σ oder verschiedene Constantenwerte unterscheiden, nennen wir je zwei Mitbegleitende von einander.

Auch auf die Theorie der Begleitenden findet die Regel von §. 54. Anwendung, dass sie von dimensionslosen Bestimmungsgrössen auszugehen hat. Es werden daher nicht die relativen Coordinaten von P_1 , sondern die Richtungscosinus der Tangente von s_1 und das Bogenelement ∂s_1 als gegeben betrachtet. Wir suchen demnach stets die Einhüllende einer Geraden von relativ gegebener Richtung. Zu gleichem Resultate gelangt man, wenn man die Schmiegungebene als beliebig relativ gegebene Ebene annimmt und s_1 als den Ort ihres Coincidenzpunkts bestimmt.

§. 64. Bestimmung einer begleitenden Curve aus ihrer Schmiegungebene.

Jede beliebig bewegte Ebene ist Schmiegungebene einer und nur einer Curve, nämlich des Ortes ihres Coincidenzpunkts oder der Einhüllenden ihrer Coincidenzlinie, und umgekehrt wird durch die Curve die Ebene bestimmt.

Der allgemeine Ausdruck einer Ebene relativ zum begleitenden Axensystem einer Curve s ist:

$$l_1(\xi - x) + m_1(\eta - y) + n_1(\zeta - z) = u \quad (59)$$

Durch die Richtungscosinus l_1, m_1, n_1 wird angezeigt, dass sie die Schmiegungebene einer begleitenden Curve s_1 sein soll, deren Bestimmungsgrößen wir durch den Index 1 von den gleichnamigen der Urcurve unterscheiden. Ist durch l_1, m_1, n_1 die Stellung gegeben, so bedarf es zur Bestimmung der Lage nur noch ihres Abstandes u vom Punkte (xyz) .

Differentiirt man Gl. (59) und setzt zur Abkürzung

$$l_1 f + m_1 g + n_1 h = k$$

so erhält man:

$$f_1'(\xi - x) + g_1'(\eta - y) + h_1'(\zeta - z) = - \frac{k \partial s + \partial u}{\partial \vartheta_1} = u_0$$

Beide Gleichungen verbunden bestimmen die Coincidenzlinie der Ebene, d. i. die Tangente an s_1 . Schreibt man sie wie folgt

$$\begin{aligned} l_1 (\xi - x - l_1 u - f_1' u_0) + \dots &= 0 \\ f_1' (\xi - x - l_1 u - f_1' u_0) + \dots &= 0 \end{aligned}$$

so zeigt sich, dass die durch sie dargestellten Ebenen beide durch den Punkt

$$\xi = x + l_1 u + f_1' u_0; \text{ etc.} \quad (60)$$

gehen. Folglich sind die Gleichungen der Tangente an die Begleitende:

$$\begin{aligned} \frac{\xi - x - l_1 u - f_1' u_0}{f_1} &= \frac{\eta - y - m_1 u - g_1' u_0}{g_1} = \frac{\zeta - z - n_1 u - h_1' u_0}{h} \quad (61) \\ u_0 &= \frac{(l_1 f + m_1 g + n_1 h) \partial s + \partial u}{\partial \vartheta_1} \end{aligned}$$

Den Abstand des Coincidenzpunkts $(x_1 y_1 z_1)$ vom Punkte (60) findet man nach §. 44. und es ergibt sich:

$$x_1 = x + f_1 \frac{u \partial \vartheta_1 - \partial u_0 - (f_1' f + g_1' g + h_1' h) \partial s}{\partial \tau_1} + l_1 u + f_1' u_0 \quad (62)$$

Dieser Punkt $(x_1 y_1 z_1)$ erzeugt die Begleitende s_1 deren Bogen aus der Formel

$$s_1 = \int \frac{\partial x_1}{f_1}$$

erhalten wird. Er ist

$$\begin{aligned} s_1 &= \frac{u \partial \vartheta_1 - \partial u_0 - (f_1' f + g_1' g + h_1' h) \partial s}{\partial \tau_1} \\ &+ \int (f_1 f + g_1 g + h_1 h) \partial s - \int u_0 \partial \tau_1 \quad (63) \end{aligned}$$

Die Inversion der innern Beziehungen ist nur in gewissen speciellen Fällen ausführbar. Nach Lösung dieser Aufgabe hängt die Inversion der Dimensionenrelation von der Integration der Gl. (63) ab, welche in Bezug auf die Gesuchte ∂s im allgemeinen linear 2. Ordnung ist. Wir teilen die Begleitenden in Classen nach ihrer Tangentialrichtung; jenachdem diese die Richtung der Tangente, Binormale u. s. w. der Urcurve ist, nennen wir sie tangential begleitend, binormal begleitend u. s. w.

§. 65. Tangential begleitende Curven.

Bei gemeinsamer Tangentialrichtung sind alle dimensionslosen Bestimmungsgrößen f, l, f' nebst anal. und $\tau, \vartheta, \sigma, \lambda$ beiden Curven gemeinsam, und der Index 1 kann bei ihnen wegfallen. Ferner ist hier $k = 0$, und die Gleichungen der Schmiegungebene und Tangente von s_1 lauten:

$$l(\xi - x) + m(\eta - y) + n(\zeta - z) = u$$

$$\frac{\xi - x - lu + f' \frac{\partial u}{\partial \vartheta}}{f} = \text{den Analogen.}$$

Die Coordinaten und der Bogen werden:

$$x_1 = x + f \left(u + \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \right) \operatorname{tg} \lambda + lu - f' \frac{\partial u}{\partial \vartheta}; \quad \text{etc.} \quad (64)$$

$$s_1 = s + \left(u + \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \right) \operatorname{tg} \lambda + \int \partial u \cot \lambda \quad (65)$$

Für $u = 0$ fallen die Curven zusammen. Für constantes $u = c$ wird s_1 die häufig vorkommende Begleitende:

$$\text{I. } \begin{aligned} x_1 &= x + c(f \operatorname{tg} \lambda + l) \\ s_1 &= s + c \operatorname{tg} \lambda \end{aligned}$$

welche einen kurzen Namen sehr bedarf, und die wir hier Hauptableitung nennen wollen.

Für $u = c\vartheta$ ergibt sich die Begleitende:

$$\text{II. } \begin{aligned} x_1 &= x + c\vartheta(f \operatorname{tg} \lambda + l) - cf' \\ s_1 &= s + c\vartheta \operatorname{tg} \lambda + c\tau \end{aligned}$$

und heisse die Nebenableitung.

Für $u = c \sin \vartheta$ verschwindet der Coefficient von f , daher fallen

die Normalebenen beider Curven zusammen, und die Gerade PP_1 misst ihren normalen Abstand. Da dieser constant $= c$ ist, so heisst die Begleitende

$$\text{III. } x_1 = x + c(l \sin \vartheta - f' \cos \vartheta) \\ s_1 = s + c \int \partial \tau \cos \vartheta$$

eine Parallele.

Für $u = c \int \partial \vartheta \cos \vartheta$ wird

$$\text{IV. } x_1 = x + c(f \operatorname{tg} \lambda + l) \int \partial \vartheta \cos \tau - c(f \sin \tau + f' \cos \tau) \\ s_1 = s + c \operatorname{tg} \lambda \int \partial \vartheta \cos \tau$$

§. 66. Binormal begleitende Curven.

Hat die Tangente von s_1 die Richtung der Binormale von s , so sind die innern Beziehungen:

$$f_1 = l; \quad l_1 = -f; \quad f_1' = f' \\ \vartheta_1 = \tau; \quad \tau_1 = -\vartheta; \quad \sigma_1 = \sigma; \quad \lambda_1 = \lambda + R$$

Die Gleichungen der Schmiegungeebene und Tangente, die Coordinaten und der Bogen werden:

$$f(\xi - x) + g(\eta - y) + h(\zeta - z) = -u \\ \frac{\xi - x + fu - f' \left(s' - \frac{\partial u}{\partial \tau} \right)}{l} = \text{den Analogen}$$

$$x_1 = x - fu + l \left(\frac{\partial s'}{\partial \tau} - u - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \right) \cot \lambda + f' \left(s' - \frac{\partial u}{\partial \tau} \right) \quad (66)$$

$$s_1 = \left(\frac{\partial s'}{\partial \tau} - u - \frac{\partial^2 u}{\partial \tau^2} \right) \cot \lambda + \int (\partial s - \partial u) \operatorname{tg} \lambda \quad (67)$$

Für $u = 0$ wird die Schmiegungeebene von s_1 Normalebene von s , die Tangente von s_1 deren Krümmungsaxe, und die Begleitende

$$\text{V. } x_1 = x + f's' + l \frac{\partial s'}{\partial \vartheta} \\ s_1 = \frac{\partial s'}{\partial \vartheta} + \int \partial s \operatorname{tg} \lambda$$

Einhüllende der Krümmungsaxe.

Für constantes $u = c$ erhält man die Begleitende:

$$\text{VI. } x_1 = x + f's' + l \frac{ds'}{\partial \vartheta} - c(f + l \cot \lambda)$$

$$s_1 = \frac{\partial s'}{\partial \vartheta} + \int \partial s \operatorname{tg} \lambda - c \cot \lambda$$

Hauptableitung der Einhüllenden der Krümmungsaxe.

Für $u = s$ ergibt sich die Begleitende:

$$\text{VII. } x_1 = x - (f + l \cot \lambda)s$$

$$s_1 = -s \cot \lambda$$

Sie heisse Hauptviertelverdrehung.

Für $u = s - c \sin \tau$ wird die Begleitende:

$$\text{VIII. } x_1 = x - (f + l \cot \lambda)s + c(f \sin \tau + f' \cos \tau)$$

$$s_1 = -s \cot \lambda + c \int \partial \vartheta \cos \tau$$

Das ist eine Parallele der Hauptvierteldrehung.

Für $u = -c \sin \tau$ kommt:

$$\text{IX. } x_1 = x + f's' + l \frac{\partial s'}{\partial \vartheta} + c(f \sin \tau + f' \cos \tau)$$

$$s_1 = \frac{\partial s'}{\partial \vartheta} + \int \partial s \operatorname{tg} \lambda + c \int \partial \vartheta \cos \tau$$

Das ist eine Parallele der Einhüllenden der Krümmungsaxe.

Für $u = s - c\tau$ kommt:

$$\text{X. } x_1 = x - (f + l \cot \lambda)(s - c\tau) + cf'$$

$$s_1 = c\vartheta + (c\tau - s) \cot \lambda$$

Das ist eine Nebenableitung der Hauptviertelverdrehung.

Für $u = \sin \tau \int \partial s \sin \tau + \sin \tau \int \partial s \sin \tau$ findet man:

$$\text{X. } x_1 = x - f(\cos \tau \int \partial s \cos \tau + \sin \tau \int \partial s \sin \tau)$$

$$+ f'(\sin \tau \int \partial s \cos \tau - \cos \tau \int \partial s \sin \tau)$$

$$s_1 = \int \partial \vartheta (\sin \tau \int \partial s \cos \tau - \cos \tau \int \partial s \sin \tau)$$

Die Normalebene dieser Curve geht durch P . Sie ist die Inverse der Einhüllenden der Krümmungsaxe.

§. 67. Hauptnormal begleitende Curven.

Hat die Tangente an s_1 die Richtung der Hauptnormale von s , so sind die innern Beziehungen:

$$f_1 = f'; \quad l_1 = f \sin \lambda + l \cos \lambda; \quad f_1' = -f \cos \lambda + l \sin \lambda$$

$$\vartheta_1 = \lambda; \quad \tau_1 = \sigma; \quad \partial \sigma_1 = \sqrt{\partial \sigma^2 + \partial \lambda^2}; \quad \lambda_1 = \arctg \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma}$$

und die inversen:

$$f = l_1 \sin \vartheta_1 - f_1' \cos \vartheta_1; \quad l = l_1 \cos \vartheta_1 + f_1' \sin \vartheta_1; \quad f' = f_1$$

$$\partial \vartheta = \partial \tau_1 \sin \vartheta_1; \quad \partial \tau = \partial \tau_1 \cos \vartheta_1; \quad \sigma = \tau; \quad \lambda = \vartheta_1$$

Die Gleichungen der Schmiegungebene und Tangente, die Coordinaten und der Bogen werden:

$$(f \sin \lambda + l \cos \lambda)(\xi - x) + \dots = u$$

$$\frac{\xi - x - (f \sin \lambda + l \cos \lambda)u - (f \cos \lambda - l \sin \lambda) \frac{\partial s \sin \lambda + \partial u}{\partial \lambda}}{f'} = \text{den Anal.}$$

$$x_1 = x + (f \sin \lambda + l \cos \lambda)u + (f \cos \lambda - l \sin \lambda) \frac{\partial s \sin \lambda + \partial u}{\partial \lambda} + f' \left\{ \left(u + \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \sin^2 \lambda \right) \right\} \quad (68)$$

$$s_1 = \left(u + \frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} \right) \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \sin^2 \lambda \right) + \int (\partial s \sin \lambda + \partial u) \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} \quad (69)$$

Zu dieser Classe gehört für $u = 0$ die Begleitende:

$$\text{XII.} \quad x_1 = x + (f \cos \lambda - l \sin \lambda) \frac{\partial s}{\partial \lambda} \sin \lambda + f' \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \sin^2 \lambda \right)$$

$$s_1 = \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \sin^2 \lambda \right) + \int \frac{\partial s}{\partial \lambda} \frac{\partial \vartheta}{\partial \lambda}$$

Das ist der Ort des Coincidenzpunkts der Spiralenbasis-ebene. Ferner für $u = -s \sin \lambda$

$$\text{XIII.} \quad x_1 = x - fs$$

$$s_1 = - \int s \partial \tau$$

Das ist die Evolvente; ihre Normalebene geht durch P . Ferner für $u = c \cos \lambda - s \sin \lambda$

$$\text{XIV.} \quad x_1 = x - fs + cl$$

$$s_1 = -c\vartheta - \int s \partial \tau$$

Das ist eine Parallele mit der Evolvente im Abstand $= c$. Ferner für $u = (c\tau - s) \sin \lambda - c\vartheta \cos \lambda$

$$\text{XV.} \quad x_1 = x + f(c\tau - s) - lc\vartheta + cf'$$

$$s_1 = c \frac{\vartheta^2 + \tau^2}{2} - \int s \partial \tau$$

$$\begin{aligned} \text{XVI. } x_1 &= x + c(f \sin \lambda + l \cos \lambda) + (f \cos \lambda - l \sin \lambda) \frac{\partial s}{\partial \lambda} \sin \lambda \\ &\quad + f' \left\{ \frac{c \partial \lambda}{\partial \sigma} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \sin^2 \lambda \right) \right\} \\ s_1 &= \frac{c \partial s}{\partial \sigma} + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \sin^2 \lambda \right) + \int \frac{\partial s \partial \vartheta}{\partial \lambda} \end{aligned}$$

Das ist eine Hauptableitung des Ortes des Coincidenzpunkts der Spiralenbasisebene. Ferner für $u = c \cos \lambda$.

$$\begin{aligned} \text{XVII. } x_1 &= x + cl + (f \cos \lambda - l \sin \lambda) \frac{\partial s}{\partial \lambda} \sin \lambda \\ &\quad + f' \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \sin^2 \lambda \right) \\ s_1 &= -c\vartheta + \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \sin^2 \lambda \right) + \int \frac{\partial s \partial \vartheta}{\partial \lambda} \end{aligned}$$

Das ist eine Parallele mit dem Orte des Coincidenzpunkts der Spiralenbasisebene.

§. 68. Rectificirend begleitende Curven.

Hat die Tangente an s_1 die Richtung der Spiralenaxe von s , so sind die innern Beziehungen:

$$\begin{aligned} f_1 &= f \sin \lambda + l \cos \lambda; \quad l_1 = f'; \quad f'_1 = f \cos \lambda - l \sin \lambda \\ \vartheta_1 &= \sigma; \quad \tau_1 = \lambda; \quad \partial \sigma_1 = \sqrt{\partial \sigma^2 + \partial \lambda^2}; \quad \lambda_1 = \arctg \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} \end{aligned}$$

und die inversen:

$$\begin{aligned} f &= f_1 \sin \tau_1 + f'_1 \cos \tau_1; \quad l = f_1 \cos \tau_1 - f'_1 \sin \tau_1; \quad f' = l_1 \\ \partial \vartheta &= \partial \vartheta_1 \sin \tau_1; \quad \partial \tau_1 = \partial \vartheta_1 \cos \tau_1; \quad \sigma = \vartheta_1; \quad \lambda = \tau_1 \end{aligned}$$

Die Gleichungen der Schmiegungeebene und der Tangente, die Coordinaten und der Bogen sind:

$$f'(\xi - x) + g'(\eta - y) + h'(\zeta - z) = u$$

$$\frac{\xi - x - f'u + (f \cos \lambda - l \sin \lambda) \frac{\partial u}{\partial \sigma}}{f \sin \lambda + l \cos \lambda} = \text{den Analogen} \quad (70)$$

$$\begin{aligned} x_1 &= x + f'u - (f \cos \lambda - l \sin \lambda) \frac{\partial u}{\partial \sigma} \\ &\quad + (f \sin \lambda + l \cos \lambda) \left(u + \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial s}{\partial \sigma} \cos \lambda \right) \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} \end{aligned} \quad (71)$$

$$s_1 = \left(u + \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} - \frac{\partial s}{\partial \sigma} \cos \lambda \right) \frac{\partial \sigma}{\partial \lambda} + \int \partial s \sin \lambda + \int \frac{\partial u}{\partial \sigma} \frac{\partial \lambda}{\partial \sigma} \quad (72)$$

Für $u = 0$ geht die Schmiegungeebene von s_1 in die rectificirende Ebene von s über. Ihre Coincidenzlinie (70), welche die rectificirende Gerade heisst, geht durch P , ist also eine Parallele mit der Spiralenaxe vom laufenden Punkte der Urcurve aus.

Zu dieser Classe Begleitender gehört für $u = 0$:

$$\text{XVIII. } x_1 = x - (f \sin \lambda + l \cos \lambda) \frac{\partial s}{\partial \lambda} \cos \lambda$$

$$s_1 = \int \partial s \sin \lambda - \frac{\partial s}{\partial \lambda} \cos \lambda$$

Das ist die Einhüllende der rectificirenden Geraden. Ferner für constantes $u = c$:

$$\text{XIX. } x_1 = x + (f \sin \lambda + l \cos \lambda) \frac{c \partial \sigma - \partial s \cos \lambda}{\partial \lambda} + cf'$$

$$s_1 = \int \partial s \sin \lambda + \frac{c \partial \sigma - \partial s \cos \lambda}{\partial \lambda}$$

Das ist eine Hauptableitung der Einhüllenden der rectificirenden Geraden.

§. 69. Verdreht begleitende Curven.

Bildet bei gleicher Stellung der rectificirenden Ebene beider Curven die Tangente an s_1 den constanten Winkel α mit der Tangente an s , so sind die innern Beziehungen:

$$f_1 = f \cos \alpha + l \sin \alpha; \quad l_1 = -f \sin \alpha + l \cos \alpha; \quad f'_1 = f'$$

$$\vartheta_1 = \vartheta \cos \alpha + \tau \sin \alpha; \quad \tau_1 = -\vartheta \sin \alpha + \tau \cos \alpha; \quad \sigma_1 = \sigma; \quad \lambda_1 = \lambda + \alpha$$

Bei Inversion geht nur α in $-\alpha$ über. Die Gleichungen der Schmiegungeebene und Tangente, die Coordinaten und der Bogen werden:

$$(-f \sin \alpha + l \cos \alpha) (\xi - x) + \dots = 0$$

$$\frac{\xi - x + (f \sin \alpha - l \cos \alpha) u - f' \frac{\partial s \sin \alpha - \partial u}{\partial \sigma \sin(\lambda + \alpha)}}{f \cos \alpha + l \sin \alpha} = \text{den Analogen.}$$

$$\begin{aligned} x_1 = x + \frac{f \cos \alpha + l \sin \alpha}{\cos(\lambda + \alpha)} & \left\{ u \sin(\lambda + \alpha) - \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial s \sin \alpha - \partial u}{\partial \sigma \sin(\lambda + \alpha)} \right\} \\ & + (-f \sin \alpha + l \cos \alpha) u + f' \frac{\partial s \sin \alpha - \partial u}{\partial \sigma \sin(\lambda + \alpha)} \end{aligned} \quad (73)$$

$$s_1 = s \cos \alpha + u \operatorname{tg}(\lambda + \alpha) - \frac{\partial}{\cos(\lambda + \alpha) \partial \sigma} \frac{\partial s \sin \alpha - \partial u}{\partial \sigma \sin(\lambda + \alpha)} - \int \partial s \sin \alpha - \partial u \cot(\lambda + \alpha) \quad (74)$$

Zu dieser die Tangential- und Binormalbegleitenden als Specialfälle für $\alpha = 0$ und R mit umfassenden allgemeineren Classe gehört für $u = 0$ die Begleitende:

$$\text{XX. } x_1 = x - \frac{f \cos \alpha + l \sin \alpha}{\cos(\lambda + \alpha)} \frac{\partial}{\partial \sigma} \frac{\partial s \sin \alpha}{\partial \sigma \sin(\lambda + \alpha)} + f' \frac{\partial s \sin \alpha}{\partial \sigma \sin(\lambda + \alpha)}$$

$$s_1 = s \cos \alpha - \sin \alpha \int \partial s \cot(\lambda + \alpha) - \frac{\partial}{\cos(\lambda + \alpha) \partial \sigma} \frac{\partial s \sin \alpha}{\partial \sigma \sin(\lambda + \alpha)}$$

Das ist der Ort des Coincidenzpunkts der um die Hauptnormale bis auf den Winkel α gedrehten Schmiegungebene. Ferner für $u = s \sin \alpha$ die Begleitende:

$$\text{XXI. } x_1 = x + \frac{f \sin \lambda + l \cos \lambda}{\cos(\lambda + \alpha)} s \sin \alpha$$

$$s_1 = \frac{s \cos \lambda}{\cos(\lambda + \alpha)}$$

eine sichtlich reciproke, welche Hauptverdrehung heissen möge. Ferner für $u = s \sin \alpha - c \sin(\vartheta \cos \alpha + \tau \sin \alpha)$ die Begleitende:

$$\text{XXII. } x_1 = x + \frac{f \sin \lambda + l \cos \lambda}{\cos(\lambda + \alpha)} s \sin \alpha + c \{ (f \sin \alpha - l \cos \alpha) \times$$

$$\sin(\vartheta \cos \alpha + \tau \sin \alpha) + f' \cos(\vartheta \cos \alpha + \tau \sin \alpha) \}$$

$$s_1 = \frac{s \cos \lambda}{\cos(\lambda + \alpha)} - c \int \partial \sigma \cos(\lambda + \alpha) \cos(\vartheta \cos \alpha + \tau \sin \alpha)$$

Das ist eine Parallele mit der Hauptverdrehung. Ferner für $u = (s - c\tau) \sin \alpha - c\vartheta \cos \alpha$ die Begleitende:

$$\text{XXIII. } x_1 = x + (f \sin \lambda + l \cos \lambda) \frac{(s - c\tau) \sin \alpha - c\vartheta \cos \alpha}{\cos(\lambda + \alpha)} + cf'$$

$$s_1 = \frac{(s - c\tau) \cos \lambda - c\vartheta \sin \lambda}{\cos(\lambda + \alpha)}$$

Das ist eine Nebenableitung der Hauptverdrehung.

§. 70. Begleitende in andern Tangentialrichtungen.

Die Inversen der Hauptnormal- und Rectificirendbegleitenden haben Tangentialrichtungen bzhw. parallel der Normal- und Schmiegungebene. Von diesen 2 Tangentialrichtungen

$$f_1 = l \sin \vartheta - f' \cos \vartheta \quad \text{und} \quad f_1 = f \sin \tau + f' \cos \tau$$

ausgehend, werden die innern Beziehungen die in §. 67. und 68. aufgestellten, nur mit Vertauschung der inversen und ursprünglichen und mit Verlegung des Index 1 nach der andern Curve.

Der erstern Richtung entsprechen die Schmiegungeebene und Tangente, die Coordinaten und der Bogen:

$$(l \cos \vartheta + f' \sin \vartheta)(\xi - x) + \dots = u$$

$$\frac{\xi - x - (l \cos \vartheta + f' \sin \vartheta)u + \frac{f \partial u}{\partial \tau \sin \vartheta}}{l \sin \vartheta - f' \cos \vartheta} = \text{den Analogen}$$

$$x_1 = x - \frac{f \partial u}{\partial \tau \sin \vartheta} + \frac{l u}{\cos \vartheta} + (l \operatorname{tg} \vartheta + f') \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau \sin \vartheta} + s \right) \quad (75)$$

$$s_1 = \frac{l}{\cos \vartheta} \left\{ u + \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial u}{\partial \tau \sin \vartheta} + s \right) \right\} + \int \partial u \cot \vartheta \quad (76)$$

Zu diser Classe gehört für $u = 0$ die Begleitende:

$$\text{XXIV.} \quad x_1 = x + (f' + l \operatorname{tg} \vartheta) s'$$

$$s_1 = \frac{s'}{\cos \vartheta}$$

Das ist die Inverse der Evolvente XIII., welche den Namen Evolute hat.

Der letztern Richtung entsprechen die Gleichungen der Schmiegungeebene und Tangente, die Coordinaten und der Bogen:

$$(f \cos \tau - f' \sin \tau)(\xi - x) + \dots = u$$

$$\frac{\xi - x - (f \cos \tau - f' \sin \tau)u + l \frac{\partial s \cos \tau + \partial u}{\partial \vartheta \sin \tau}}{f \sin \tau + f' \cos \tau} = \text{den Analogen}$$

$$x_1 = x + \frac{f u}{\cos \tau} - l \frac{\partial s \cos \tau + \partial u}{\partial \vartheta \sin \tau} + (f \operatorname{tg} \tau + f') \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial s \cos \tau + \partial u}{\partial \vartheta \sin \tau} \right) \quad (77)$$

$$s_1 = u \operatorname{tg} \tau + \frac{\partial}{\cos \tau \partial \vartheta} \left(\frac{\partial s \cos \tau + \partial u}{\partial \vartheta \sin \tau} \right) + \int \frac{\partial s + \partial u \cos \tau}{\sin \tau} \quad (78)$$

Zu diser Classe gehört für $u = 0$ die Begleitende:

$$\text{XXV. } x_1 = x + (f \operatorname{tg} \tau + f') \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{\partial s \cot \tau}{\partial \vartheta} \right) - l \frac{\partial s}{\partial \vartheta} \cot \tau$$

$$s_1 = \frac{\partial}{\cos \tau \partial \vartheta} \left(\frac{\partial s \cot \tau}{\partial \vartheta} \right) + \int \frac{\partial s}{\sin \tau}$$

Das ist der Ort des Coincidenzpunkts der um die Binormale auf den Winkel τ gedrehten rectificirenden Ebene. Ferner für $u = -\int \partial s \cos \tau$ die Begleitende:

$$\text{XXVI. } x_1 = x - \frac{f}{\cos \tau} \int \partial s \cos \tau$$

$$s_1 = \int \partial s \sin \tau - \operatorname{tg} \tau \int \partial s \cos \tau$$

Das ist die Inverse der Einhüllenden der rectificirenden Geraden.

§. 71. Beziehungen zwischen den aufgeführten Arten Begleitender.

Den Uebergang von einer Curve zu einer Begleitenden bestimmter Art kann man als eine Operation ansehen und deren Resultat eine Ableitung nennen. Der umgekehrte Uebergang ist dann die inverse Operation. Auf eine Operation kann man eine neue, sei es dieselbe oder eine andre, folgen lassen und so aus einfachen Arten Begleitender unzählig viele zusammengesetzte bilden, deren Theorie dann in den Theorien der einfachen mit enthalten ist, so dass auch die Inversion keine neue Aufgabe stellt. Einige zusammengesetzte Arten sind indes hier mit den einfachen gezählt worden: VI. VIII. IX. X. XIV. XVI. XVII. XIX. XXII. XXIII.

Die Aufgabe der Inversion besteht oft in einer blossen Umstellung der Gleichung und der Substitution bekannter Werte, nämlich 1) wenn in der Coordinatengleichung s nicht vorkommt, 2) wenn zwischen s_1 und s die Relation linear ist. Andernfalls muss durch Integration der letztern der Wert von s in s_1 erst gefunden werden.

Reciprok nennen wir solche Begleitende, deren Inversen derselben Art sind, wenn auch die Constanten (c , α) andere, nämlich entgegengesetzte, Werte haben. Vorbedingung ist die Reciprocität der innern Beziehungen. Sie ist erfüllt bei den tangential und binormal, sowie, allgemeiner, bei den verdreht begleitenden Curven.

Unter den 16 aufgeführten einfachen Arten sind reciprok I. II. III. IV. VII. XXI; parweise inverse von einander V. mit XI., XIII.

mit XXIV. und XVIII. mit XXVI. Unter den 4 übrigen sind XII. XX. XXV. keiner allgemeinen Integration der Gleichung für s fähig. Die Inversion von XV. ist bloss wegen ihrer nicht einfachen Gestalt übergangen. Die Differentialgleichungen in einfachst möglicher Form, welche s in s_1 bestimmen, lauten:

$$\text{V.} \quad \frac{\partial^2 s'}{\partial \tau_1^2} + s' = -s_1'$$

$$\text{XII.} \quad \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} \left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \sin^2 \lambda \right) + \frac{1}{\sin^2 \lambda} \left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \sin^2 \lambda \right) = \frac{s_1'}{\sin \vartheta_1}$$

$$\text{XVIII.} \quad \partial \left(\frac{\partial s}{\partial \lambda} \cos^2 \lambda \right) = -\partial s_1 \cos \tau_1$$

$$\text{XX.} \quad \frac{\partial^2}{\partial \tau_1^2} \left(\frac{\partial s}{\partial \vartheta_1} \right) \sin \alpha - \left(\frac{\partial s}{\partial \vartheta_1} \right) \frac{\sin \lambda}{\cos \lambda_1} = -s_1'$$

$$\text{XXV.} \quad \frac{\partial^2}{\partial \tau_1^2} \left(\frac{\partial s}{\partial \vartheta_1} \cos \lambda_1 \right) + \left(\frac{\partial s}{\partial \vartheta_1} \cos \lambda_1 \right) \frac{1}{\cos^2 \lambda_1} = s_1'$$

während in I. bis IV., in VII. XIII. XV. XXI. der Wert des primitiven s unmittelbar durch die Gleichung gegeben ist.

In der Reihe der 26 Arten folgt oft auf die specielle Art die allgemeinere. So ist enthalten für $c = 0$ V in VI und IX; VII in VIII und X; XII in XVI und XVII; XIII in XIV und XV; XVIII in XIX; XXI in XXII und XXIII; ferner für $\alpha = 0$ II in XXIII; III in XXII; endlich für $\alpha = R$ V in XX; VII in XXI; VIII in XXII; X in XXIII; Erweiterungen, die sich auch durch Zusammensetzung herleiten lassen.

Die meisten der aufgestellten Curvengleichungen enthalten eine oder mehrere willkürliche Constante. Demnach hat meistens eine Begleitende einer Art einfach oder mehrfach unendlich viele Mitbegleitende derselben Art für andere Constantenwerte. Individuell sind allein V. XII. XVIII.

Hauptableitungen sind unter sich bei variirendem c die Mitbegleitenden für I. VI. XVI. XIX.; bei variirendem Anfang der s für VII. VIII. X. XXI. XXII. XXIII.; bei unabhängig variirendem Anfang der s und τ für X. XXIII., der s , τ , ϑ für XXIII.; bei variirender unterer Integralgrenze für IV. XXVI.

Nebenableitungen werden bei variirendem c die Mitbegleitenden für II. X. XXIII.

Parallel werden einander bei variirendem c die Mitbegleitenden

für III. VIII. IX. XIV. XVII. XXII.; wenn ausser c unabhängig auch der Anfang der τ variirt, für VIII. IX.; wenn c und der Anfang der s unabhängig variiren, für XIV.; bei unabhängig variirenden Anfängen der s , τ , ϑ für XV.; bei variirendem Anfang der s für XIII.; bei variirender unterer Integralgrenze für XI.

Hauptverdrehungen werden von einander bei variirendem α die Mitbegleitenden für XXI. XXIII.; bei variirendem Anfang der ϑ für XXIV., der τ für XXVI.

Die Mitbegleitenden für IV. gehören derselben Art IV. an.

Einige Mitbegleitende sind übergangen, weil sie nicht einfach sind.

Schlussbemerkung.

Es ist nicht unwichtig auf die kinematische Bedeutung der 4 Grössen τ , ϑ , σ , λ hinzuweisen, welche am sichtlichsten in der Theorie der begleitenden Curven hervortritt. Es hat sich gezeigt, dass nicht bloss τ und ϑ , sondern auch die ganz heterogen definirten σ , λ Drehungswinkel von Ebenen und Geraden sind, welche den Lauf beliebiger Curven bestimmen, und dass sie in einer gewissen Reciprocität stehen.

Jenachdem nämlich τ , ϑ , σ oder λ Drehungswinkel einer solchen Ebene ist — das ist bzhw. der Fall bei der Normal-, Schmiegungs-, rectificirenden oder Spiralenbasisebene — ist bzhw. ϑ , τ , λ oder σ der Drehungswinkel ihrer Coincidenzlinie.

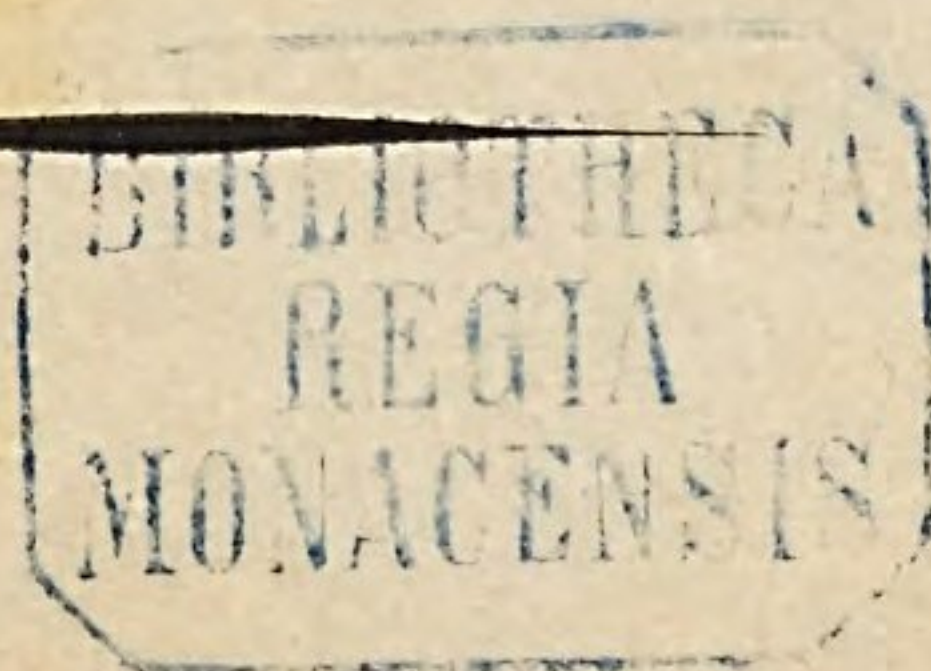
Jenachdem man daher τ , ϑ , σ oder λ zum Drehungswinkel der Tangentialrichtung einer begleitenden Curve nimmt, wird bzhw. ϑ , τ , λ oder σ Drehungswinkel der Schmiegungebene, und umgekehrt.

Ist ferner τ oder ϑ Drehungswinkel der Tangentialrichtung, so ist bzhw. σ oder λ Drehungswinkel der Hauptnormale.

Dieses Verhalten lässt sich nicht umkehren, vielmehr findet hier ein beständiger Fortschritt statt. Vom Tangentialdrehungswinkel σ , λ gelangt man zu einem neuen Drehungswinkel σ_1 der Hauptnormale und λ_1 der rectificirenden Geraden definirt durch die Gleichungen:

$$\partial\sigma_1^2 = \partial\sigma^2 + \partial\lambda^2; \quad \text{tg } \lambda_1 = \frac{\partial\lambda}{\partial\sigma}$$

An vorstehende Bemerkung knüpfen sich Fragen und Untersuchungen, welche jedoch vor der Hand nicht zu den Principien der Curvenlehre gehören.



Druck der Universitäts-Buchdruckerei von F. W. Kunike in Greifswald.



Hoppe, Reinhold

Lehrbuch der analytischen Geometrie in zwei Teilen

Bd.: 1

1880

Math.p. 226 ef-1

urn:nbn:de:bvb:12-bsb11651120-8